A inserção da Teoria dos Fractais na contabilidade financeira: evidências teórico-empíricas.

Autores
CÉSAR AUGUSTO TIBÚRCIO SILVA
Universidade de Brasília

MARCIA ATHAYDE MATIAS
Universidade de Brasília

LEONARDO VIEIRA
Universidade de Brasília

Resumo

Esta pesquisa versa sobre a inserção da teoria dos fractais no campo de pesquisa da contabilidade financeira. A partir do trabalho seminal de Mandelbrot (1963) com séries temporais da commodity algodão, os pesquisadores têm analisado e aplicado modelos matemáticos não lineares com propriedades fractais, particularmente em séries temporais de ativos negociados no mercado financeiro. A teoria dos fractais, associada aos conceitos de caos, complexidade e não-linearidade abre um novo e polêmico campo de estudos na contabilidade financeira, que vai de encontro aos conceitos estabelecidos pela moderna teoria de finanças, sobretudo os preconizados pela Hipótese de Eficiência dos Mercados. O interesse em objetos fractais é motivado pela questão relacionada ao comportamento dos preços de ativos, de interesse da contabilidade. Verifica-se neste estudo a evolução dos conceitos e das ferramentas matemáticas para identificação e projeção de preços a partir de modelos fractais. Conclui-se que já existe argumento científico suficiente, e sofisticados estudos, que dão suporte para a aplicação desta nova área na contabilidade financeira. Nesse sentido, a revisão da Hipótese de Eficiência dos Mercados é inexorável.

Palavras-chave: fractal, caos, complexidade, não-linearidade, séries temporais, Hipótese de Eficiência dos Mercados.

Introdução

Estudos recentes apontam para uma nova direção no e análise das oscilações de preços de ativos financeiros, questionando alguns dos postulados mais importantes da moderna teoria. Dentre estes estudos, a teoria dos fractais surge inovando em argumentos que se opõem aos tradicionais conceitos da hipótese de eficiência dos mercados e da normalidade da distribuição dos preços, presentes nos estudos de *asset pricing*. Com a geometria fractal espera-se, *a priori,* maior precisão na modelagem da turbulência, descontinuidade e não-periodicidade, fenômenos que realmente caracterizam os mercados financeiros atuais (WERON, 2000).

A partir dos estudos seminais de Benoit Mandelbrot sobre a geometria fractal, iniciados na década de sessenta e que culminaram com a publicação do livro *The Fractal Geometry of Nature* (A Geometria Fractal da Natureza, 1982), abriu-se uma nova perspectiva de mensuração matemática para fenômenos, elementos e efeitos da natureza. Como Mandelbrot (2004, p.5) afirma: "*minha principal contribuição foi descobrir um ramo da matemática que percebe a ordem oculta na desordem aparente, o plano no não planejado, o padrão regular na irregularidade e na rugosidade da natureza*". A partir de seus estudos,

características fractais começaram a ser observadas nos mais diversos fenômenos, desde variações climáticas a batimentos cardíacos, bem como no comportamento dos preços de ativos, tendo como objetivo o aumento da capacidade de compreensão desses fenômenos, para a melhoria de previsão de comportamentos futuros.

Lorenz (1996, p.99), em seus estudos sobre a teoria do caos, questiona "[...] *por que deveríamos ser capazes de fazer qualquer tipo de previsão? Por que, efetivamente, deveríamos esperar ver o futuro, ou uma pequena parte dele?*". O fato é que, no que diz respeito à previsão do comportamento de preços de ativos em mercados financeiros, existe uma real importância econômica que envolve o futuro de milhares de empresas e investidores em todo o mundo. A introdução de ferramentas que melhorem a capacidade de predição do comportamento de preços de ativos é um desafio para acadêmicos e práticos, e a discussão de novas abordagens para o estudo destes comportamentos, como a teoria dos fractais, é de suma importância para o seu desenvolvimento e a sua posterior aplicação prática. Entretanto, depende primordialmente da introdução, disseminação e compreensão destes novos conceitos, a fim de que seja possível a realização de reflexões e discussões sobre o assunto.

Os conceitos da teoria dos fractais aplicados a contabilidade financeira são relativamente recentes, a ponto de ainda parecem estranhos ou confusos para algum leitor que não esteja familiarizado com o tema. Pelas poucas pesquisas publicadas, algumas vezes pode-se ter a percepção de que as evidências de fractalidade nas ciências humanas são meras especulações científicas, levando a posições céticas quanto à validade dos resultados até então encontrados. É fato que o assunto ainda está pouco difundido, como observa Grabbe (1999), para o qual a falta de discussão acerca dos conceitos de fractais é similar ao que ocorreu no passado com a teoria de precificação de opções: "*o assunto não era ensinado nos departamentos de economia, porque nenhum dos professores o compreendia* [...]". [1] Conforme informa Corazza et al. (1997), o interesse em objetos fractais diz respeito a uma questão central para a área: qual é o comportamento dos preços dos ativos?

Assim, esta pesquisa objetiva reunir as evidências geradas sobre a presença de fractalidade em situações de interesse especial da contabilidade, e em particular, da contabilidade financeira. Para tanto, é necessário realizar uma análise distintiva entre os conceitos da teoria dos fractais e os da teoria do caos – os quais freqüentemente se confundem – e organizar os pressupostos teóricos que permeiam a aplicação da teoria dos fractais nas situações de interesse da contabilidade.

A teoria dos fractais pode ser útil para a contabilidade nas situações em que essa necessita de instrumentos mais adequados de mensuração de valor. Além disso, o conhecimento que uma série histórica de preços segue um padrão fractal poderá ajudar, por exemplo, no processo de orçamentário, inclusive para fins de projeções na análise de investimento.

Este artigo está estruturado em cinco partes, além dessa introdução. A seguir será comentado brevemente o proceder metodológico. Após, é feita uma distinção entre os conceitos de fractalidade e a teoria do caos. A terceira parte descreve e analisa as evidências de fractalidade em estudos de interesse da contabilidade. A quarta parte comenta os conflitos entre as pesquisas e a teoria com a teoria de finanças. A quinta parte apresenta as conclusões.

Proceder Metodológico

[1] Tradução livre de "*it wasn't taught in economic departments at the time, because none of the professors understood It […]".*

Esta é uma pesquisa de cunho bibliográfico, desenvolvida a partir de artigos, livros e materiais. Para viabilizar sua realização, foram utilizados os bancos de dados de publicações científicas existentes nas bases PROQUEST e CAPES, através da busca por textos que contivessem as palavras "*fractal*", em inglês, no singular e no plural, associadas com as palavras "*financial market*", "*asset pricing" e "accounting"*. Estas buscas retornaram mais de cinqüenta textos, entre artigos científicos e outros textos publicados em periódicos, no período de 1986 a 2005. Do universo previamente listado, foram selecionados para os artigos que foram originalmente publicados em periódicos científicos, com ênfase naqueles com estudos empíricos.

Adicionalmente, foram visitados os sítios na Internet de alguns dos principais congressos brasileiros que envolvem a área de finanças, especificamente: o Congresso Brasileiro de Finanças, o Enanpad - Encontro da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração e o Congresso USP de Contabilidade e Controladoria, além do banco de teses de duas universidades, da CAPES e da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações do IBICT. Estas buscas retornaram uma dissertação de mestrado que contempla aplicação de fractais ao mercado financeiro.

Análise distintiva entre conceitos de fractalidade e teoria do caos

Fractais

A definição original de Mandelbrot (1982, p. 15) é: "um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff Besicovitch[2] excede a dimensão topológica. Todo conjunto com dimensão fracionária é um fractal[3]". Segundo Karas e Serra (1997, p.5), *apud* Hayashi (2002) fractais são figuras com propriedades e características peculiares que os diferenciam das figuras geométricas habituais. São estruturas matemáticas, que se repetem infinitamente quando vistas numa escala cada vez menor.

Uma definição simples de fractal encontra-se na Wikipédia:

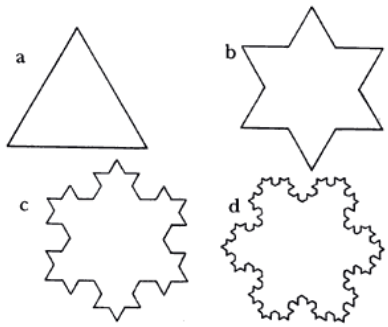
> Fractais (do latim fractus, fração, quebrado) é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto-similares e independem de escala. Em muitos casos, um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Em Houaiss (2001) tem-se que fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, se repetem em qualquer escala. A palavra tem origem latina em *frangó,is,frégí,fráctum,frangère*, que significa quebrar, fraturar. As primeiras figuras com dimensão fractal foram identificadas no início do século XX, a exemplo da Curva de Koch, gerada em 1905 pelo matemático Helge Von Koch, mas foi Benoit Mandelbrot que identificou os modelos matemáticos representativos destas figuras e criou o termo *fractal* para identificá-las (LORENZ, 1996, p.204).

Figura 1 – Curva de Koch, demonstrando as quatro primeiras iterações.

[2] Félix Hausdorff**,** matemático alemão (1868-1942). Em 1918 publicou trabalhos em que apresentou a possibilidade de as dimensões poderem ser números não inteiros. Por volta de 1930, o trabalho de Hausdorff foi complementado pelo de Abram Samoilovitch Besicovitch, matemático russo (1891-1970), o qual formalizou a equação matemática utilizada hoje (O Amor a Matemática, 2005).

[3] Tradução livre do original "*A fractal is by definition a set for which the Haurdorff Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension. Every set with a noninteger D is a fractal*".



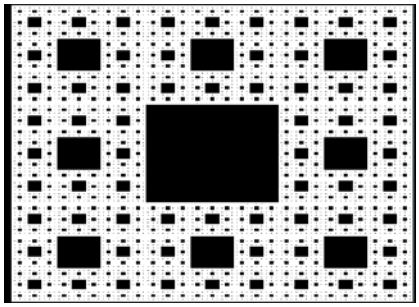
Fonte: Disponível em <http://omega.ilce.edu>

Mandelbrot (2004, p.130) descreve a Curva de Koch:

> A Curva de Koch corresponde a um terço do floco de neve. [...] começa com uma linha reta – como o lado horizontal do triângulo do alto (a). [...] vamos puxá-lo para formar uma tenda intermediária sobre a seção do meio (b). Assim, o gerador Koch é uma linha quebrada composta de vários intervalos. O fractal é formado com base na regra simples de substituir cada uma das linhas cada vez mais curtas, por versões cada vez menores do gerador de tenda (c; d). Cada iteração acrescenta mais tendas [...]. (numeração acrescida).

Uma propriedade comum em fractais é a *auto-semelhança* ou similaridade de escala. Este termo descreve a propriedade que muitos sistemas possuem, na qual as partes, quando ampliadas, demonstrarão ser idênticas ao sistema como um todo (LORENZ, 1996, p.205). Um exemplo clássico deste tipo de fractal é o Carpete de Sierpenski, nele, percebe-se claramente a regra de formação: um quadrado original cercado de oito quadrados menores, em que cada lado possui 1/3 do tamanho do quadrado original. Cada um dos quadrados menores pode ser dividido da mesma forma, e assim, sucessivamente, num processo infinito (GRABBE, 1999).

Figura 2 – Carpete de Sierpenski.



Fonte: *Web site* de Clint Sprott. Disponível em <http:sprott.physycs.wisc.edu>

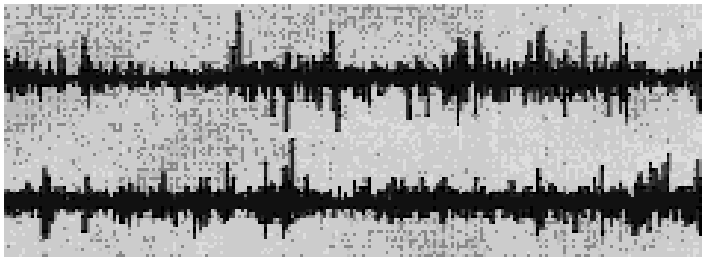
Outros fractais são apenas estatisticamente auto-similares, ou seja, as partes pequenas, se ampliadas, não se apresentarão idênticas ao sistema como um todo, mas equivalentes, com o mesmo tipo geral de aparência. Encontram-se na natureza alguns exemplos desta categoria de fractais, como os galhos de árvores.

Figura 3 – Galhos de árvores.

Fonte: *Web site* de Clint Sprott. Disponível em <http:sprott.physycs.wisc.edu>

De forma similar, a partir de uma equação simplificada de processo fractal, é possível obter um gráfico fractal que simula a oscilação de preços de ações no mercado. A fim de que se possa observar a maneira como o gráfico construído se assemelha a uma série real de retornos de ações, abaixo foi demonstrada uma série de retornos da empresa IBM.

Figura 4 – Séries de retornos de ações: 1) simulada com fractais; 2) retornos reais da empresa IBM (sem a informação indicativa de período).



(1)

(2)

Fonte: Web site da Universidade de Yale. Disponível em <http://classes.yale.edu/fractals/panorama/welcome.html>

Matematicamente, a característica mais distintiva da formação fractal é o fato de sua dimensão assumir valores diferentes das dimensões topológicas. Considerando que um ponto possui dimensão zero; uma linha reta possui uma dimensão; uma superfície plana possui duas dimensões; e, um sólido possui três dimensões, os fractais possuem dimensões diferentes e próprias de cada fenômeno. A dimensão fractal também é chamada de dimensão Hausdorff, e sua fórmula mais simples pra cálculo é:

$$N = r^D$$

Onde N é o número de objetos similares obtidos a partir de um fator de escala (geração de padrões similares), fator "r". O fator de escala é uma função da lei de potência determinante de sua formação. Esta, por último, é invariante por escala, entre o objeto e suas N partes.

Mandelbrot (2004, p.196) resgata seu conceito para fractais, afirmando: "um padrão ou objeto, cujas partes ecoam do todo, mudando de escala para cima ou para baixo, com base numa razão ou potência constante".

Peters (1994 p.16) argumenta que a dimensão fractal caracterizada como um objeto ocupa o espaço no qual está inserido. Em uma série temporal fractal, o *tempo* assume a dimensão fractal, a qual é determinada pelo comportamento dos preços: o tempo fractal se expande em períodos de inatividade do mercado financeiro, e se contrai durante o período de atividade. Séries financeiras possuem um *tempo intrínseco*, determinado mais pela própria série temporal do que pelo "tempo do relógio" (MÜLLER *et* al, 1993).

Grabbe (1999b) questiona: se o tempo assume a forma fractal, o qual se move em ritmo desassociado do tempo real, "qual deverá ser a correta dimensão fractal do tempo em mercados especulativos? [4]".

Teoria do Caos

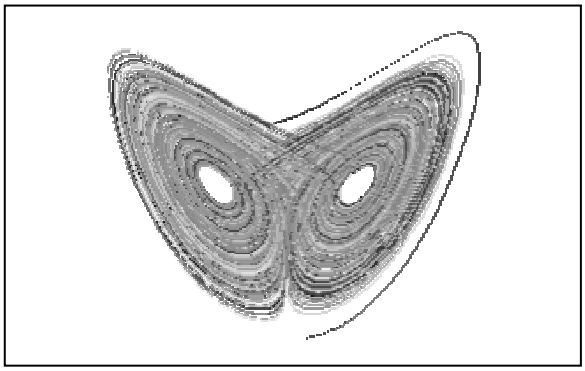
Lorenz (1996, p.21), descreve o caos como: "um comportamento que é determinístico, ou quase, [...] possuindo uma pequena aleatoriedade, mas que *não aparenta* ser determinístico" (grifo do autor). Prigonine (2002, p.80), associa o caos à instabilidade dos fenômenos da natureza. As leis da natureza, diante da teoria do caos, se tornam essencialmente probabilísticas, eliminando a necessidade de tentar associá-las invariavelmente a um sistema determinista. Para Hsieh (1991) caos é um processo não linear determinístico que "parece" aleatório. Essa seria a razão para que o estudo do caos seja interessante: a possibilidade de identificar, e explicar, flutuações nos mercados que parecem ser randômicos.

Como exemplos de fenômenos caóticos pode-se citar o movimento de uma onda, a evolução populacional de uma espécie, as oscilações do clima terrestre ou da bolsa de valores.

A aparente aleatoriedade dos sistemas caóticos pode ser atribuída à dependência sensível que possuem de seus estados iniciais. Isto significa que pequenas variações nos estados iniciais de um sistema caótico podem provocar enormes variações em seus estados seguintes, como nos estudos sobre a trajetória de esquis na neve, no qual Lorenz descreve grandes diferenças de trajetórias de esquis que partiram de pontos com apenas um milímetro de distância entre eles. A descoberta da dependência sensível às condições iniciais deu origem a célebre questão de Lorenz de 1972: "o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?".

Outra característica de sistemas caóticos é a presença de atratores estranhos. Lorenz (1996, pg.57), os define como "os estados de qualquer sistema que freqüentemente se repitam, ou que freqüentemente sejam atingidos com precisão cada vez maior [...]". A expressão "estranhos" é devida a aparência que estes atratores podem assumir. Alguns atratores estranhos possuem estrutura fractal. Abaixo um exemplo clássico criado por Lorenz na década de 60.

Figura 5 – Borboleta de Lorenz.



Fonte: Web site de Allrite Mathematical Sciences & I.T. Disponível em: <http://www.allrite.com.au/science/science/sa1.htm>

Complexidade e não-linearidade são fenômenos associados ao caos. Lorenz (1996, p. 197), no entanto, afirma que apesar dos sistemas caóticos pressuporem a não-linearidade e em sua maioria lidarem com a complexidade, a presença de não-linearidade ou complexidade por

[4] Tradução livre para *"what is the correct fractal dimension for time in speculative markets?"*

si só, não significa o caos. Gleiser (2002, p.55) argumenta que caos e complexidade são fenômenos interconectados, porém distintos. Hayashi (2002, p.11) defende que os dois fenômenos são complementares, e afirma:

> A teoria da complexidade é o estudo de como um sistema de equações muito complicadas, pode gerar padrões de comportamento bastante simples e ordenados para certos valores dos parâmetros destas equações. Já a teoria do caos estuda como equações não-lineares simples geram comportamentos complicados.

Lorenz (1996, p.209) argumenta que os fractais têm muito pouco a ver com a teoria do caos, sob o ponto de vista da aleatoriedade: "Alguns fractais chegam a quase ser classificados como caos por serem produzidos mediante regras descomplicadas, embora parecendo altamente complexas, e não apenas por aparentar estruturas não-convencionais". Por outro lado, a geometria fractal foi amplamente adotada como ferramenta matemática pela teoria do caos a partir da década de 80 (MANDELBROT, 2004, p. 5).

Gleiser (2002, p.43) afirma que sistemas dinâmicos não-lineares com comportamento caótico determinístico geram figuras fractais e que o fenômeno da auto-similaridade é um importante aspecto da teoria do caos.

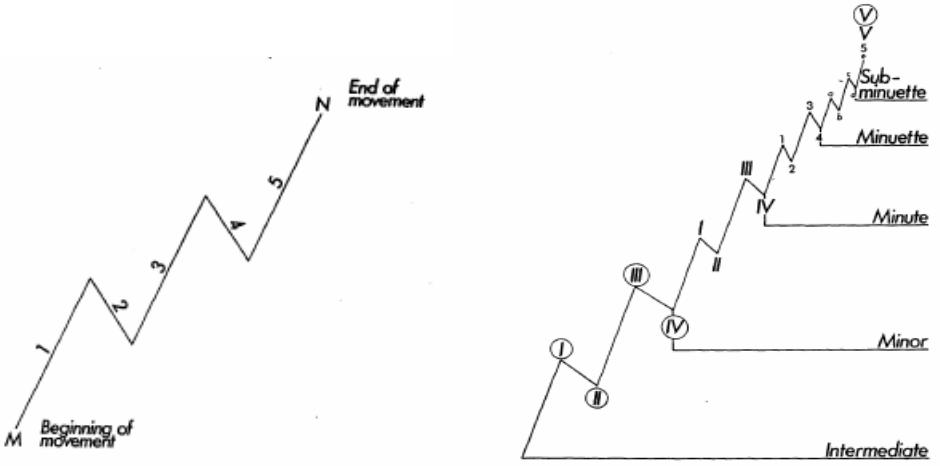
Percebe-se então uma forte associação entre os conceitos de fractalidade, de caos, de complexidade e de não-linearidade. Diante de uma série temporal de preços, podem-se evidenciar, portanto, padrões não-lineares de comportamento com características fractais, na qual a identificação dos atratores estranhos (razões diferentes de mudanças de escalas no tempo) é necessária para a compreensão do padrão fractal e para a realização de projeções, as quais poderão ser modeladas a partir da geração de equações matemáticas complexas.

Análise das evidências de fractalidade em informações financeiras

Em 1934, Ralph Elliott apresentou estudos baseados na percepção de que nos processos sócio-econômicos, é possível distinguir alguns padrões de comportamento que se repetem similar e constantemente como em ondas (PRECHTER, 1990, p.13). Elliot direcionou seus estudos para o mercado de capitais com o objetivo de compreender o comportamento dos preços para predizê-los no futuro. Publicou em 1938 um ensaio denominado "*The Wave Principle*" (O Princípio da Onda), no qual destacava que o comportamento de preços das ações se dava em grandes ciclos atrelados ao tempo, nos quais era possível distinguir cinco movimentos básicos (figura 6). Identificou que, no transcorrer de um ciclo, os cinco padrões principais se repetiam em escalas cada vez menores (figura 7), apresentando padrões de auto-similaridade característicos das figuras fractais (GLEISER, 2002, p. 216).

Figura 6 – Movimento completo de cinco ondas descrito por Elliott.

Figura 7 – Característica fractal do comportamento de preços.



Fonte: PRECHTER, R. R. *The major works of R. N. Elliott*. 1990.

É importante destacar que Mandelbrot (1997, p.115), apesar de reconhecer que Elliott identificou em seu trabalho geradores de padrões auto-similares qualitativamente semelhantes aos fractais, afirma que o trabalho de Elliott não deve ser confundido com fractais, pois o mesmo se limitou a realizar previsões a partir da interpretação dos gráficos.

Ainda sem ter desenvolvido sua teoria sobre os fractais, Mandelbrot (1963), em um estudo no qual analisou graficamente diferentes conjuntos de séries temporais diárias e mensais de preços do algodão, no período compreendido entre 1816 e 1950, percebeu que, apesar de não seguirem uma distribuição gaussiana, as séries temporais eram estatisticamente estacionárias e os gráficos tinham a mesma aparência. Esta importante característica mais tarde se mostrou fundamental para o desenvolvimento de sua teoria sobre fractais. Sobre o resultado de suas pesquisas, Mandelbrot afirma:

> Eu suponho, portanto, que, desde 1816, o processo de geração dos preços do algodão, tem mudado somente em sua escala, com possível exceção na Guerra Civil [...]. Longas séries de mudanças mensais de preços poderiam, portanto, ser representadas por combinações da Lei de Pareto estável[5] (uma lei de potência que no futuro seria identificada como uma escala fractal).

É interessante notar que segundo Mehrling (2005) o trabalho de Mandelbrot de 1963 foi fundamental para o posterior desenvolvimento das Hipóteses de Eficiência dos Mercados de Fama. Mandelbrot (1982, p. 337) retoma seu trabalho original de 1963 e apresenta uma fórmula simplificada para o que chamou de "princípio da escala de mudanças de preço[6]". Comprovou que as séries temporais do algodão utilizadas em seu trabalho original eram estacionárias e demonstravam um processo estável não-gaussiano de distribuição dos preços, o qual preservara o mesmo aspecto, mudando apenas na escala.

Peters (1989) utilizou a técnica R/S de Hurst[7], para avaliar a persistência de memória em séries de retornos mensais de ações do ranking S&P500, títulos do tesouro norte-

[5] Tradução livre de *"I conjecture therefore, that, since 1816, the process generating cotton prices, has changed only in its scale, with the possible exception of the Civil War […]. Long series of monthly prices changes should therefore be represented by mixtures of Stable Paretian laws"*.

[6] Tradução livre de "*scaling principle of price change*".

[7] Harold Edwin Hurst, hidrólogo que desenvolveu uma fórmula denominada *rescaled range analysis,* baseada em uma lei de potência para calcular o tamanho de reservatórios de água para o rio Nilo na década de 50. Posteriormente verificou-se que sua fórmula se aplica em diversos fenômenos da natureza. Essa técnica foi refinada em trabalhos posteriores, segundo Barkoulas e Baum (1996) por Mandelbrot (em 1972 e 1975), Mandelbrot e Wallis (em 1969) e Lo (1991).

americano, e o retorno relativo entre as duas séries no período de 1950 a 1988, num total de 463 observações mensais. Utilizou a seguinte fórmula:

$$H = \frac{\log (R/S)}{\log (N)}$$

Onde: R/S é a divisão da amplitude entre a maior e a menor ocorrência registrada (R), pelo desvio padrão encontrado na série (S); N é o número de observações; e, H é o fator da lei de potência que originalmente foi objeto de estudo de Hurst, nesta fórmula chamada de Expoente de *Hurst*, variando entre zero e um, com as seguintes implicações para séries temporais: H = 0,5 implica em comportamento puramente aleatório; H entre zero e 0,5 implica em comportamento não persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa; e H maior que 0,5 ($0,5 < H \leq 1$) implica em comportamento persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de continuar positiva e vice-versa, e o nível desta persistência é medido quão maior for o resultado de 0,5. Para Corazza *et al*. (1997), o processo fractal é uma generalização do passeio aleatório (*random walk*).

Os resultados obtidos por Peters (1989) foram: H de 0,61 para as ações, 0,64 para os títulos e 0,66 quando avaliada a relação entre ações/títulos. Peters atestou que, de fato, o comportamento do mercado evidenciou uma persistência de memória, característica do comportamento browniano fractal, mas não tão significante que permitisse a projeção de resultados além de um curto período. O fator aleatório se mostrou muito mais presente. Concluiu que os resultados demonstram que o modelo "passeio aleatório puro" não se aplica aos mercados de capitais, conforme prega a hipótese dos mercados eficientes.

A técnica R/S de Hurst tem sido um dos testes mais utilizados para verificar se existe uma dinâmica fractal numa série.

Larrain (1991) trabalhou com os conceitos de fractais, caos, não-linearidade e complexidade. Utilizou para análise informações trimestrais das taxas de juros dos T-Bills, no período entre 1962 e 1989. Definiu uma equação que capturasse não só o efeito dos preços passados sobre os preços atuais, mas este fato combinado com alguns fatores econômicos e financeiros, como renda, suprimento nominal de moeda e a inflação, que também influenciam no comportamento das taxas de juros. Atestou a influencia de ambos os fatores no comportamento das taxas. Na medida em que as características não-lineares se sobrepõem sobre a influência dos fatores fundamentais, a estrutura dinâmica fica mais predisposta a oscilações e mudanças abruptas de preços. Concluiu que esses fatores (não-linearidades) são necessários, porém não suficientes para afirmar que a estrutura seja caótica ou fractal.

Muller *et al* (1993) encontraram propriedades fractais em séries temporais de taxas de câmbio, inclusive identificando o fator de escala (lei de potência) seguido pelos preços, a partir da análise dos intervalos de tempo desde poucos minutos até um ano. Utilizaram amostras diárias e intra-diárias do período compreendido entre junho de 1973 e junho de 1993. Os autores verificaram que as mudanças no comportamento dos preços se assemelham mais ao modelo fractal, em detrimento do processo GARCH. Além disso, a volatilidade é positivamente correlacionada com a atividade do mercado e o volume de transações, um indicativo de que o mercado é heterogêneo, onde os diferentes participantes analisam eventos passados e novos com diferentes horizontes de tempo e diferentes expectativas em negociações, o que cria volatilidade.

Corazza *et al* (1997) pesquisaram preços de futuros de commodities no período de 1981 a 1991 da bolsa de Chicago. Os autores aplicaram quatro testes, inclusive a técnica de Hurst e a técnica de Hurst refinada por Lo (1991). O resultado encontrado indica que a série histórica corresponde as propriedades fractais.

Barkoulas *et al* (1997) analisaram séries temporais mensais do período entre 1960 e 1994 de 21 *commodities*, em busca de evidências de dependência e memória de longo-prazo, utilizando para isso uma abordagem diferente da utilizada por Peters (1989). Ao contrário de utilizar a técnica de *rescaled range* (RS), os autores trabalharam com um modelo AFRIMA (p,d,q) – *autoregressive fractionally integrated moving average* (sendo o parâmetro ***d*** interpretado como parâmetro de longa-memória). Assumindo que: $-1/2 < d < 1/2$, o processo AFRIMA exibe memória de longo-prazo para $0 < d < ½$; memória de curto-prazo para $d = 0$; e, memória intermediária para $-1/2 < d < 0$. Seis, entre as 21 commodities estudadas apresentaram evidências em favor de uma ordem fracional de integração: cobre, ouro, soja em grão, chá, lã e o índice UCAM[8]. Após a retirada de *outliers* (0,25 < retornos < -0,25), foram realizados novos testes e verificada uma queda na evidência de fractalidade na série de lã, e o desaparecimento de indícios de fractalidade na série de cobre. Os autores concluíram que a presença de fractalidade nas séries temporais confirma a probabilidade de reversões no preço à vista, indicativas de processos não lineares, caracterizadas como flutuações cíclicas irregulares com dependência de longo-termo. Estas evidências sugerem o debate sobre a eficiência dos preços e a racionalidade do mercado.

Anteriormente Barkoulas e Baum (1996) analisaram a dependência dos retornos das ações no mercado norte-americano analisando índices setoriais e séries de empresas para avaliar os efeitos da agregação. Utilizando também o modelo AFRIMA, os autores não conseguiram detectar nos preços das ações a fractalidade. Entretanto, os autores verificaram a presença em algumas séries de empresas.

Lo (1991) modificou a estatística R/S e aplicou nos dados do mercado acionário entre 1962 e 1987, com 6 409 observações. Lo encontrou pouca evidência de memória na história desse mercado.

Panas (2002) utilizou dados do fechamento diário das c*ommodities* cobre, alumínio, zinco, níquel, estanho e chumbo, do período entre janeiro de 1989 e dezembro de 2000 (num total de 2.987 observações), para atestar a presença de memória de longo-prazo e do caos no mercado de commodities minerais. Após a realização de testes estatísticos observou que todas as séries temporais possuíam distribuição não-normal, com exceção do cobre e do alumínio, apresentaram-se fortemente estacionárias. Além disso apresentaram resultados indicativos de autocorrelação (30 *lags*). Para atestar a presença de memória de longo-prazo utilizou primeiramente a estatística R/S de Hurst, a qual apresentou resultados acima de 0,5 para todas as séries. No entanto, considerando que a estatística R/S apresenta viés nos resultados na presença de heterogeneidades, o autor realizou novamente os testes a partir da estatística R/S modificada por Lo (veja LO, 1991)[9] chamada estatística Z(n). Desta vez os resultados para memória de longo-prazo foram positivos somente para alumínio. Na seqüência, testou a presença de memória com base no modelo AFRIMA, o qual indicou o alumínio e o cobre como apresentando dependência de longo-prazo, enquanto o níquel e o chumbo apresentaram dependência de curto-prazo, e os metais zinco e estanho apresentaram indícios de não-persistência de memória.

[8] Índice UCAM, media ponderada de preços de exportação de 50 *commodities* primárias de países em desenvolvimento.

[9] LO, A. *Long-term memory in stock market prices. Econométrica*. vol. 59, p. 1279-1313, 1991.

Após definir o modelo AFRIMA, os testes para detecção de comportamento caótico foram realizados a partir dos resíduos do modelo, com aplicação dos testes de Eckmann-Ruelle, Teorema de Brocks e verificação da sensibilidade do sistema a mudanças nas condições iniciais com base no expoente de Lyapunov. O resultado apontou para as *commodities* estanho e zinco, que apresentaram forte indicação de comportamento caótico. Em contraste com a memória de longo-prazo, o caos representa um comportamento aleatório gerado por um modelo determinista.

Richards (2000) pesquisou a presença de fractalidade em séries temporais de taxas de câmbio diárias de 18 moedas correntes e, adicionalmente, de três índices compostos norte-americanos, todas com aproximadamente 30 anos de observações. Partiu da premissa de que as características estatísticas dos fractais são a não-homogeneidade e a intermitência. Conceituou a co-dimensão fractal como a diferença entre a dimensão fractal do espaço que abrange a série *D*, e a dimensão fractal intrínseca da série *d*.

$$C = D - d$$

Sendo que a série é homogênea quando C = 0, e não-homogênea ou fractal, quando C≠0. Os resultados indicaram que todas as taxas de câmbio apresentaram fortes evidências de não-homogeneidade, enquanto que os índices do governo norte-americano apresentaram fracas evidências de não-homogeneidade. O autor utilizou os métodos *state transition, AR1 (first order auto-regressive) e* GARCH (*generalized auto-regressive conditional heteroskedasticity),* para captar a volatilidade e irregularidade de períodos. Adicionalmente usou o Filtro de Kalman (veja Kalman, 1960)[10] para garantir a aplicabilidade dos métodos. O autor concluiu que existe uma modalidade de fractalidade estocástica, a qual possui um forte componente aleatório. Criticou o uso de modelos ARIMA e ARCH, alegando que, ainda que estes modelos captem algumas características das séries financeiras, não geram intermitência.

Na seqüência de suas pesquisas sobre a utilização do método *state transition* para realizar projeções de resultado de taxas de câmbio, Richards (2004) realizou análises comparando o método *state transition-fitted residual scale ratio* (ST-FRSR) com métodos da família ARCH: GARCH (veja Bollerslev, 1986)[11] e o EGARCH (veja Nelson, 1991)[12], em observações intra-diárias de quatro séries temporais com aproximadamente 30 anos de variações de taxas de câmbio. Os testes iniciais para detecção de fractalidade (não-homogeneidade) e simetria de escala apresentaram indícios de presença fractal, de moderada a fraca. Em relação aos modelos utilizados para projeções, o modelo ST- FRSR apresentou os melhores resultados para modelagem e projeção de alta volatilidade intra-diária, enquanto o modelo EGARCH apresentou os melhores resultados para séries diárias. O autor concluiu que as séries temporais analisadas seguiram um padrão de volatilidade estocástica difusa, com maior componente aleatório do que fractal, o que permitiu a projeção com base no modelo EGARTH.

Di Matteo *et al* (2005) estudaram empiricamente as propriedades de escala de 29 taxas de câmbio diárias, 32 índices do mercado financeiro e 28 instrumentos de renda fixa, pelo período aproximado de 10 anos. Partindo de estudos prévios que pressupõem a heterogeneidade dos mercados financeiros, os autores analisaram o grau de fractalidade de mercados desenvolvidos e emergentes para atestar se estes mercados apresentam diferenças.

---

[10] KALMAN, R. E. *A new approach to linear filtering and prediction problems. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers,* ***Journal of Basic Engineering.*** n. 83D, p.35-45, 1960.

[11] BOLLERSLEV, T. Generalized *autoregressive conditional heteroskedasticity.* ***Journal of Econometrics***. n.31, p. 307-327, 1986.

[12] NELSON, D. B. *Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach.* ***Econometrica.*** n. 52, p. 347-370, 1991.

A análise estatística foi realizada através da abordagem geral de Hurst. Após testar os dados, os resultados indicaram a clara diferença entre os coeficientes de Hurst de acordo com o mercado atuante, sendo que todos os índices de mercados em desenvolvimento apresentaram $H > 0,5$ e todos os índices dos mercados desenvolvidos apresentaram $H < 0,5$. O Brasil situou-se na categoria de resultados maiores que 0,5. Os autores testaram a validade do coeficiente de Hurst a partir da aplicação dos testes em 100 séries puramente aleatórias criadas em computador com o mesmo número de observações das séries utilizadas na pesquisa. Os resultados indicaram para um $H = 0,5$ para todos os casos.

Os autores concluíram que todos os mercados financeiros mundiais apresentam simetria de escala, com características fractais e que os métodos usualmente utilizados para controlar risco, com base no desvio padrão ou no índice de Sharpe, não são capazes de prover uma boa classificação como a realizada em sua pesquisa.

Conflitos com a moderna teoria de finanças

Entre as polêmicas geradas pela teoria dos fractais, talvez a mais crítica e responsável pelo aparente baixo número de pesquisas na área fractal (MANDELBROT, 2004, p.242) é a contradição que esta faz com as Hipóteses de Eficiência dos Mercados – EMH[13], com a teoria da precificação por arbitragem - APT[14] e o modelo de precificação de ativos de capital – CAPM[15] (WERON e WERON, 2000).

A EMH está calcada em alguns dos seguintes pressupostos (vide, por exemplo, CARDOSO; MARTINS, 2004): os preços atuais são independentes dos preços de ontem, pois toda informação disponível já foi processada e incorporada a estes preços; os investidores são considerados indivíduos racionais que estão sempre em busca da maximização de retornos, a partir do conhecimento de toda informação pública disponível; os negociadores estão a par das mudanças que ocorrem no ambiente; os preços são justos; o mercado tende a permanecer em equilíbrio, na medida em que sempre existirão vendedores e compradores; e, toda nova informação impacta diretamente e de mesma maneira o mercado e seus participantes.

Contra a EMH, a teoria dos fractais pressupõe que o mercado possui memória de curto e longo prazo (PETERS, 1989, 1994; MANDELBROT, 1997, 2004; PANAS, 2002; BARKOULAS *et* al, 1997) e que experiências anteriores exercem significativa influência sobre a tomada de decisão presente e sobre as expectativas futuras em relação ao risco e ao retorno de ativos financeiros. Outro argumento contra a EMH (RICHARDS 2000, 2004) é a não-homogeneidade do mercado financeiro. Os investidores possuem horizontes de investimentos diferenciados e esse fato faz com que novas informações exerçam diferentes impactos sobre diferentes interesses impactando o equilíbrio do mercado, gerando volatilidade e intermitência.

Dois outros pressupostos da moderna teoria são postos em xeque: o comportamento de preços de ativos financeiros seguirem um padrão tipo passeio aleatório, o qual assume um padrão de saltos de crescimento e decrescimento constantes de mesma probabilidade e tem como propriedades ser um processo de Markov, no qual a variância cresce linearmente com o tempo (DIXIT E PINDYCK, 1993, p.63); e a distribuição normal de séries financeiras.

A teoria dos fractais pressupõe que existe algum grau de ordem oculta na aparente aleatoriedade de séries financeiras, caracterizado pela simetria de escalas e pelas leis de

[13] Do inglês *Efficient Market Hypothesis.*
[14] Do inglês Arbitrage Price Theory.
[15] Do inglês Capital Asset Pricing Model.

potência (MANDELBROT 1963, 1997, 2004; WERON E WERON, 2000, 2004; Di MATTEO *et al*, 2005), o que reduz o componente aleatório.

Várias análises empíricas atestaram que os preços no mercado financeiro não seguem um padrão de distribuição normal (por exemplo, PETERS, 1989; MANDELBROT, 2004; BARKOULAS *et al*, 1997). Este fato é particularmente importante na análise de investimentos, pois afeta diretamente o componente "risco", uma vez que na distribuição gaussiana a probabilidade de ocorrência de picos de preços acima ou abaixo de três desvios padrões é de 0,5%, quando na realidade, esse percentual pode ser bem maior. Peters (1994, p.26), analisando uma série temporal do índice *Dow Jones* com 103 anos, atestou que a parcela de picos de preços que ultrapassavam três desvios padrões no período foi de 2,4%.

Weron e Weron (2000) restabelecem os pressupostos da Hipótese de Eficiência Fractal, primeiramente introduzidos por Peters (1994): o mercado é constituído de vários indivíduos com um grande número de diferentes horizontes temporais; a informação tem impacto diferente sobre os diferentes horizontes temporais; a estabilidade do mercado é sobremaneira uma questão de liquidez (balanceamento da oferta e da demanda). A liquidez existe quando o mercado é composto de vários investidores com diferentes horizontes temporais; os preços refletem uma combinação de técnicas de negociação de curto-prazo e fundamentos de avaliação de longo-prazo; e se um título está atrelado a um ciclo econômico, então não existirá uma tendência de longo-prazo, mas a tendência de liquidez e a informação de curto-prazo dominarão.

Conclusão

A principal conclusão desta pesquisa é a observação de que já existem suficientes evidências empíricas sobre presença de fractalidade, particularmente em séries temporais de ativos, que dêem suporte para o desenvolvimento da aplicação em contabilidade financeira. No entanto, percebe-se que as pesquisas ainda estão em fase inicial de comprovação de hipóteses, nas quais são utilizadas abordagens conceituais diferentes com a aplicação de diversos métodos estatísticos, tendo alguns resultados claramente indicado a presença de fractalidade nas séries temporais financeiras e outros nem tanto.

A contradição que a teoria dos fractais apresenta em relação a EMH é clara e não pode ser ignorada, e como sugestão para novas pesquisas, novos estudos comparativos podem ser realizados, com a apresentação das implicações práticas de se utilizar em análise financeira um ou outro paradigma.

Não é a intenção de esta pesquisa realizar qualquer tipo de análise bibliométrica, mas nota-se uma reincidência de autores nos trabalhos que vem sendo publicados. Certamente toda nova teoria provoca receio e algum ceticismo por parte da comunidade científica. Verifica-se, portanto, alguns pioneiros se expondo para defender conceitos, que no futuro, deverão estar disseminados e estabelecidos, como a própria EMH.

Entende-se que discutir, testar e atestar novas teorias e validar conceitos através de novas técnicas empíricas é a utilização da abordagem positiva da ciëncia, é o caminho da evolução da ciëncia contábil voltada para o campo das finanças, e, certamente, somente o tempo irá trazer todas as respostas necessárias para entendimento e disseminação da teoria dos fractais aplicada ao mercado financeiro. Nesse sentido, a revisão da Hipótese de Eficiência dos Mercados é inexorável.

Referências

BARKOULAS, J. ; BAUM, C. *Long term dependence in stock returns.* ***Journal of Empirical Finance***. V. 3, n. 4, p. 393-417, dez., 1996.

BARKOULAS, J.; LABYS, W. C.; ONOCHIE, J. *Fractional Dynamics In International Commodity Prices.****The Journal of Futures Markets.*** v. 17, n. 2, p.161, abr. 1997.

CARDOSO, R. L.; MARTINS, V. A. **Teoria avançada da contabilidade**. Org. IUDÍCIBUS, S.; LOPES, A. B São Paulo: Atlas, 2004.

CORAZZA, M. ET AL. *Searching for fractal structure in agricultural futures markets.* **The Journal of Futures Markets.** V. 17, n. 4, p. 433-473, jun, 1997.

Di MATTEO, T.; ASTE, T.; DACOROGNA, M. M. *Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development.* ***Journal of Banking & Finance***. n. 29, p. 827-851, 2005.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. ***Investment under uncertainty***. New Jersey, USA: Priceton University Press, 1993.

GLEISER, Ilan. **Caos e complexidade: a evolução do pensamento econômico**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

GRABBE, J. O. *Chaos and fractals in financial markets - Part 1.* ***The Laissez Faire City Times.*** v. 3, n 22, mai. 1999.

_____. *Chaos and fractals in financial markets - Part 2.* ***The Laissez Faire City Times.*** v. 3, n. 24, jun. 1999.

HAYASHI, A. D. **Aplicação dos fractais ao mercado de capitais utilizando-se as Elliott Waves**. Santa Catarina, 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss.** São Paulo: Objetiva, 2001.

HSIEH, David. *Chaos and nonlinear dynamics application to financial markets.* **The Journal of Finance.** Vo. XLVI, no. 5, dec. 1991, p. 1839-1877.

LORENZ, E. N. **A Essência do caos.** Tradução de Cláudia Bentes David. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1996.

LARRAIN, M. *Testing chaos and nonlinearities in T-Bill rates*. ***Financial Analysts Journal***. v.47, n.5, p.51, sep/out. 1991.

MANDELBROT, B. B. *The variation of certain speculative prices*. ***The Journal of Business***. v. 36, n. 4, p.394, out. 1963.

_____, B. B. ***The fractal geometry of nature: updated and Augmented***. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.

_____, B. B. ***Fractals and scale in finance: discontinuity, concentration, risk***. New York: Springer, 1997.

_____. B. B.; HUDSON, R. **Mercados financeiros fora de controle: a teoria dos fractais explicando o comportamento dos mercados**. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

MEHRLING, Perry. **Fischer Black and the revolutionary idea of finance.** Hoboken: Wiley, 2005.

MÜ LLER, U. A.; DACOROGNA, M. M.; DAV, R. D.; PICTET, O. V.; OLSEN, R. B.; WARD, J. R. *Fractals and intrinsic time: a challenge to econometricians. In XXXIXth*

International Conference of the Applied Econometrics Association (AEA), 1993, Luxembourg. **Anais**… Luxemburg, 1993.

O Amor a Matemática. Ed. 23/09/2005. Disponível em: <http://haaguaemmat.blogs.sapo.pt/arquivo/2005_09.html>. Acesso em 11/11/2005.

PANAS, E*. Long memory and chaotic models of prices on the London Metal Exchange.* ***Resources Policy***. vol. 27, p.235-246, 2002.

PETERS, E. E. *Fractal Structure in the Capital Markets.* ***Financial Analysts Journal***. v.45, n.4, p.32, jul/ago. 1989.

_____. E. E. ***Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics***. New York, USA: John Wiley & Sons, 1994.

PRECHTER, R. R. ***The major works of R. N. Elliott***. Second Edition. Georgia, USA: New Classics Library, 1990.

PRIGONINE, I. **As leis do caos**. Tradução Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

RICHARDS, G. R. *The fractal structure of exchange rates: measurement and forecasting.* ***Journal of International Financial Markets, Institutions & Money.*** v.10, p. 163-180, 2000.

_____. *A Fractal forecasting model for financial time series.* ***Journal of Forecasting***. n. 23, p.587-602, 2004.

WERON, A.; WERON, R. *Fractal markets hypothesis and two power-laws*. ***Chaos, Solitons & Fractais***. v. 11, p. 289-296, 2000.

Wikipédia – Enciclopédia Livre. Conceito de fractal. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal#Fontes>. Acesso em 07/11/2005.