Gestão de portfólios: uma proposta de otimização através da média-semivariância

Autores
CARLOS ALBERTO ORGE PINHEIRO
Fundação Visconde de Cairu

ALBERTO SHIGUERU MATSUMOTO
Universidade Católica de Brasília

Resumo

Este artigo aplica a matriz de semivariância para ativos e compara as soluções obtidas através da fronteira eficiente com base na média-semivariância, fundamentadas por Ballestero (2005), com aquelas soluções derivadas da média-variância do modelo de Markowitz (1952). A contribuição de Ballestero (2005) na otimização de portfólios se dá através da criação da matriz semivariância. Através dela é possível definir a composição de portfólios com base na minimização da semivariância do portfólio abaixo da média sujeita à limitação paramétrica do valor médio do portfólio de mercado. Ao contrário do trabalho realizado por Ballestero (2005) que fez uso de informações de um mercado de ações hipotético com apenas dez ativos, para a pesquisa, foram selecionadas vinte e duas ações, constantes da carteira teórica do Ibovespa durante os quadrimestres no período de 2000 a 2004 e, que estiveram presentes em todas as carteiras. Os resultados indicam que as soluções encontradas pelo modelo de Ballestero (2005) definem portfólios cujos retornos superam os retornos dos portfólios propostos pelo modelo de Markowitz (1952) além de superarem também os parâmetros CDI, Ibovespa e Índice Brasil, no período de janeiro a novembro de 2005, com a vantagem de apresentarem desvios-padrões similares.

1. Introdução

A aproximação clássica de Markowitz (1952) destinada à seleção de portfólios é desenvolvida em dois estágios. No primeiro estágio o objetivo é o de definir uma fronteira eficiente de lucratividade-risco de Pareto (E-V) ao minimizar o risco de portfólio sujeito a uma limitação paramétrica de lucratividade medida através do valor médio dos retornos de portfólio, ou retorno esperado. No segundo estágio busca-se determinar a utilidade ótima do investidor sobre a fronteira eficiente com base na teoria de Von Neumann e Morgenstern (1947), especialmente, em relação à maximização da utilidade esperada. Se o primeiro estágio é facilmente executado, o segundo apresenta dificuldades e, desta forma, é menos usado na prática, embora algumas técnicas propostas, a exemplo de Kallberg e Ziemba (1983) e Ballestero e Romero (1998) estejam disponíveis.

O problema para o primeiro estágio consiste em mensurar o risco do investimento. Algumas medidas de risco são baseadas na variância e na covariância assumindo que o investidor está interessado na dispersão dos retornos. Outras medidas estão baseadas na semivariância e, segundo Grootveld e Hallerbach (1999), computacionalmente são complexas e problemáticas na otimização dos portfólios. Agora, sua utilização é importante porque alguns investidores podem apresentar aversão especial a retornos abaixo de um valor médio e, desta forma, o uso de uma medida *downside risk* tal como a semivariância é a mais indicada uma vez que o desvio padrão interpreta qualquer diferença do retorno médio, acima ou abaixo, como indesejado e a visão de risco dos investidores pode estar relacionada a perdas, apenas.

Em outras palavras, a semivariância abaixo do valor médio é uma medida apropriada quando o investidor percebe o risco como uma mudança ou possibilidade de resultados adversos mais do que a dispersão de retornos. A semivariância abaixo do valor médio é definida como a soma dos desvios quadrados do valor médio considerando apenas os desvios abaixo deste valor médio. Isto significa que os investidores estão interessados mais em pequenos retornos do que na variabilidade dos resultados.

Uma das medidas de risco utilizadas para que possa ser adequada à aversão ao risco ou à função de utilidade do investidor é o momento parcial inferior de grau-n (*law partial moment* – LPM). Para Nawrocki (1991) a medida tem recebido atenção na literatura financeira em termos da teoria de precificação de ativos e é conhecida como semivariância, desde que seu grau seja igual a dois (n=2).

Mais tarde, além de realizar uma revisão da literatura sobre as medidas de semivariância, Nawrocki (1996) refere-se ao propósito prévio de fazer uso de um índice de recompensa baseado no momento parcial inferior (LPM) como um heurístico simples capaz de otimizar portfólios. Comparações das distribuições com base na variância e semivariância são realizadas por Bond e Satchell (2002). O desempenho dos ativos avaliados através de medidas *downside risk* é uma parte do trabalho desenvolvido por Sortino e Price (1994). Porter (1974) e Fishburn (1977) são outras contribuições anteriores sobre o uso da semivariância. Já o modelo proposto por Ballestero (2005) não tem a intenção de recolocar as aproximações existentes por outras aproximações, uma vez que todas elas podem ser úteis. No entanto, a contribuição do autor para otimização de portfólios dá-se através da criação da matriz semivariância. Através dela é possível definir a composição de portfólios com base na minimização da semivariância do portfólio abaixo da média sujeita à limitação paramétrica do valor médio do portfólio de mercado.

A proposta deste trabalho, portanto, é aplicar a matriz de semivariância para ações negociadas na Bovespa e comparar as soluções obtidas através da fronteira eficiente com base na média-semivariância, fundamentadas por Ballestero (2005), com aquelas soluções derivadas da média-variância do modelo de Markowitz (1952). Em seguida, será verificada a existência de coincidências de soluções para os dois modelos e avaliar qual dos modelos alcança os maiores retornos.

A pesquisa apresenta uma breve revisão do modelo de Ballestero (2005) que justifica a criação da matriz de semivariância. Na seqüência, descreve-se a metodologia e os critérios de seleção das ações da amostra. Na penúltima parte do artigo são apresentados os resultados encontrados. Por último, as considerações finais são apresentadas.

2. Fundamentação Teórica

Ballestero (2005) considera (X_1, … X_j, … X_n) como representantes dos vetores dos pesos do portfólio. Desta forma, X_j é a fração de cada ativo no portfólio do ativo *j*th. O propósito será o de formular um modelo de média-semivariância quadrática paramétrica com a seguinte estrutura:

$$Min \sum_{j,h} A_{jh} X_j X_h \tag{1}$$

$$Sujeito \sum_{j=1}^{n} E_j X_j = E_0 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = 1 \tag{3}$$

$$X_j \leq X_0 \tag{4}$$

para cada ativo *j*th, ao longo da limitação de não-negatividade, considerando que:

X_j (ou X_h) é o peso percentual do ativo *j*th no portfólio, representando a fração investida no ativo *j*th;

E_j é o valor médio ou retorno esperado sobre o ativo *j*th;

E_0 é um parâmetro positivo considerado como alvo especificado de retorno esperado, ou seja, o nível de retorno que o investidor pretende receber ao investir no portfólio;

X_0 é um parâmetro garantindo um nível desejável de diversificação no portfólio;

A_{jh} são os coeficientes a serem determinados na pesquisa desenvolvida.

O investidor está esperando alcançar o *downside risk* a um nível tão baixo quanto possível provando que um nível desejável E_0 de valor seja alcançado. Por isso, a medida *downside* seria minimizada sobre a condição do valor médio, conforme equação (2). Levando-se em consideração que a soma dos pesos é igual a 1, quanto menor o parâmetro X_0 mais diversificado será o portfólio, uma vez que nenhum peso de ativo *j*th pode exceder o limite X_0. Os coeficientes A_{jh} serão obtidos mais tarde como funções dos retornos de ativo. A estrutura apresentada é similar ao modelo de média-variância proposto e desenvolvido por Markowitz (1952) sob condições de diversificação. Existem dificuldades matemáticas em especificar a função (1) no caso da semivariância. De fato, o portfólio de semivariância abaixo do valor médio envolve uma função multivariada com domínio soma e integração definida por $\overline{\overline{R}}_p \leq \overline{R}_p$ significando que o retorno aleatório do portfólio, $\overline{\overline{R}}_p$ é menor que (ou igual a) seu valor médio $\overline{R}_p$. Se o modelo concorda com situações discretas, a soma múltipla dos desvios quadrados abaixo da média (em termos de probabilidades) seria estendida ao domínio n-dimensional, conforme:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{R}}_p X_j \leq \overline{R}_p \tag{5}$$

onde os pesos X_j são desconhecidos. Um tratamento análogo é usado no caso de situações contínuas. Para resolver o problema multivariado, alguns pressupostos são necessários para definir uma estrutura algébrica tal como a função (1) pronta para ser minimizada através de técnicas operacionais.

A pesquisa desenvolvida por Ballestero (2005) foca sobre o caso discreto, embora o autor explique que o modelo possa ser estendido a uma distribuição de probabilidade contínua. Para isso, o mesmo define uma variável crítica, definida por *M,* na análise financeira do portfólio de mercado. Em seu trabalho, Ballestero (2005) explica que a soma dos retornos dos ativos é estendida a todos os ativos no mercado com pesos em proporções a cada valor de mercado do ativo. Assim, o portfólio de mercado reflete os retornos sobre o mercado de ações como um todo, de forma que a proporção de cada ativo seja igual à participação no mercado como um todo e que o investidor consiga distribuir seus recursos entre o ativo livre de risco e um portfólio que represente as ações negociadas no mercado.

2.1 Validade da equação de regressão beta de Sharpe (1964)

A idéia de regredir o retorno do ativo em relação ao retorno do mercado tem base no trabalho desenvolvido por Sharpe (1964). Assim, a equação conhecida pelos acadêmicos determina que o retorno aleatório $\overline{\overline{R}}_p$ sobre cada ativo *j*th é relacionado ao retorno aleatório do portfólio de mercado $\overline{\overline{R}}_M$. Assim define-se:

$$\overline{\overline{R}}_j = \alpha_j + \beta_j \overline{\overline{R}}_M + \overline{\overline{\varepsilon}}_j \tag{6}$$

onde α_j e β_j são constantes enquanto que $\overset{=}{\varepsilon}_j$ é um erro aleatório com covariância igual a zero $(\overset{=}{\varepsilon}_j, \overset{=}{\varepsilon}_h)$ tanto quanto covariância igual a zero $(\overset{=}{\varepsilon}_j, \overset{=}{R}_M)$.

O retorno sobre qualquer ativo é uma função linear de retorno de portfólio do mercado além de um termo de erro aleatório, $\overset{=}{\varepsilon}_j$, que é independente do mercado. O parâmetro β_j é familiar à análise financeira e é conhecido por coeficiente beta. Como uma relação empírica, a equação é defendida a despeito das aproximações de equilíbrio de mercado. O coeficiente beta é definido pela seguinte expressão:

$$\beta_j = \operatorname{cov}(j, M) \Big/ \sigma_M^2 \tag{7}$$

onde $\operatorname{cov}(j, M)$ é a covariância de retorno sobre o ativo *j*th com o retorno sobre o portfólio de mercado, enquanto que σ_M^2 é a variância de portfólio de mercado. Na equação (7) o coeficiente β_j representa a inclinação da linha de regressão. Esta inclinação representa o co-movimento entre $\overset{=}{R}_j$ e $\overset{=}{R}_M$, ou seja, o co-movimento entre retornos aleatórios sobre o ativo *j*th e retornos aleatórios sobre o portfólio de mercado.

Se o portfólio é suficientemente diversificado o risco específico ou não sistemático desaparece já que eventos positivos em algumas companhias ofuscam eventos negativos das outras companhias. Assim, para Ballestero (2005) a diversificação é imposta por limites legais em muitos mercados de ações, e ainda mais, administradores desejam selecionar portfólios diversificados. Por isso, os limites da diversificação, conforme a equação (4), são adicionados ao modelo. Se estes limites são removidos, então os portfólios com poucos ativos podem não apresentar resultados satisfatórios.

2.2 Nível de diversificação para portfólios

Para Ballestero (2005) um portfólio pode ser colocado a um nível *L* de diversificação se a seguinte condição é satisfeita:

$$\max_{j \in 1,n} X_j = \frac{1}{L} e \frac{n}{L} = q, com Q \geq q \geq 1 \sum_{j=1}^{n} X_j = 1, X_j \geq 0 \tag{8}$$

O autor explica que *Q* é um limite positivo. Da condição acima, quanto maior o nível de diversificação menor o peso maior. Assim, se os valores assumidos por *L* forem grandes $L \longrightarrow \infty$, então $n \longrightarrow \infty$, se não a condição soma de pesos igual a 1 não se manteria; e se o parâmetro *q* ao ser fixado ao nível inferior a 1, a mesma condição não permaneceria também.

A equação (6) que representa o retorno do ativo pode ser rescrita por:

$$\overset{=}{R}_j - E_j = \overset{=}{\theta}_j + \beta_j (\overset{=}{R}_M - E_M) \tag{9}$$

onde E_j e E_M são os retornos esperados do ativo *j*th e o portfólio do mercado *M*, respectivamente. Além do mais:

$$\overset{=}{\theta}_j = \alpha_j + \overset{=}{\varepsilon}_j - E(\alpha_j + \overset{=}{\varepsilon}_j) \tag{10}$$

onde $E(\alpha_j + \overset{=}{\varepsilon}_j)$ é o valor médio da variável aleatória $(\alpha_j + \overset{=}{\varepsilon}_j)$. Aleatório $\overset{=}{\theta}_j$ tem valor médio igual zero. Assim:

$$E(\overset{=}{\theta}_j) = E(\alpha_j + \overset{=}{\varepsilon}_j) - E(\alpha_j + \overset{=}{\varepsilon}_j) = 0 \tag{11}$$

Ao agregar a equação (9) sobre (X_1, .. X_j, … X_n) a seguinte equação é obtida:

$$\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{R}}_j - E_j)X_j = \bar{\bar{\theta}} + (\bar{\bar{R}}_M - E_M)\sum_{j=1}^{n}\beta_j X_j \tag{12}$$

Assim, no lado direito da equação a variável aleatória % passa a ser dada por:

$$\bar{\bar{\theta}} = \sum_{j=1}^{n}\bar{\bar{\theta}}_j X_j \tag{13}$$

Aleatório $\bar{\bar{\theta}}$ apresenta valor médio igual a zero. Além disso, sua variância tende a zero já que o nível de diversificação tende ao infinito, ou seja, $\bar{\bar{\theta}}$ converge para zero com média quadrada como $L \longrightarrow \infty$.

No desenvolvimento de seu trabalho Ballestero (2005) exemplifica a equação de semivariância de portfólio abaixo do valor médio como igual a:

$$V(<) = \sum \left[(\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{R}}_{jt} X_j - \sum_{j=1}^{n} E_j X_j \right]^2 \rho(t) \tag{14}$$

com a primeira soma é estendida para cada observação $\bar{\bar{R}}_{jt}$ satisfazendo:

$$\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{R}}_{jt} X_j \leq \sum_{j=1}^{n} E_j X_j \tag{15}$$

O símbolo $\rho(t)$ representa a probabilidade da ocorrência do evento t. Se todas as observações (*t =1, 2, ..., T*) são igualmente prováveis, então $\rho(t) = {}^{1}\!/_{T}$.

Por outro lado, a semivariância de portfólio acima do valor médio é definida por:

$$V(>) = \sum \left[(\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{R}}_{jt} X_j - \sum_{j=1}^{n} E_j X_j \right]^2 \rho(t) \tag{16}$$

a primeira soma é estendida a cada observação $\bar{\bar{R}}_{jt}$ satisfazendo:

$$\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{R}}_{jt} X_j > \sum_{j=1}^{n} E_j X_j \tag{17}$$

Desta maneira, a soma da semivariância de portfólio acima do valor médio com a semivariância abaixo do valor médio implica na seguinte equação representativa da variância:

$$V(<) + V(>) = V = \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{j=1}^{n}(\bar{\bar{R}}_{jt} X_j - \sum_{j=1}^{n} E_j X_j \right]^2 \rho(t) \tag{18}$$

Observa-se que as funções (2) e (3), citadas no início deste artigo, justificam a equação representativa da variância.

2.2.1 A equação de semivariância de portfólio acima do valor médio

Já que o nível de diversificação tende ao infinito a semivariância do portfólio tem um limite dado por:

$$\lim_{L \to \infty} V(>) = \sum_{j,h} \beta_j \beta_h V(\overline{\overline{R}}_M > E_M) X_j X_h \tag{19}$$

onde β_j e β_h são os coeficientes beta para os ativos *j*th e *h*th, respectivamente, enquanto que $V(\overline{\overline{R}}_M > E_M)$ é a semivariância do portfólio acima do valor médio de mercado E_M.

Da equação inicial (3) e da equação (12) as seguintes expressões são obtidas por Ballestero (2005):

$$V(>) = \sum \left[\overline{\overline{\theta}} + (\overline{\overline{R}}_M - E_M) \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j \right]^2 \rho(t) \tag{20}$$

onde a primeira soma do lado direito é estendida para todas as observações em que:

$$\overline{\overline{\theta}} + (\overline{\overline{R}}_M - E_M) \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j > 0 \tag{21}$$

Com base nas duas últimas equações tem-se:

$$V(>) = \sum \overline{\overline{\theta}}^2 \rho(t) + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j \right) \sum \overline{\overline{\theta}} (\overline{\overline{R}}_M - E_M) \rho(t) + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j \right)^2 \sum (\overline{\overline{R}}_M - E_M)^2 \rho(t) \tag{22}$$

onde cada $\sum$ é estendido a todas as observações que:

$$\left(1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j \right) \overline{\overline{\theta}} + (\overline{\overline{R}}_M - E_M) > 0 \tag{23}$$

Como o objetivo de Ballestero (2005) é o demonstrar que $\lim_{L \to \infty} V(>) = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \beta_h X_j X_h \right) V(\overline{\overline{R}}_M > E_M)$ o autor examina alguns termos relevantes nas expressões. Desta forma tem-se que:

(i.) Como o nível de diversificação tende ao infinito, os coeficientes da soma dos betas de *j*=1 a *j*= n é limitado entre os maiores e menores beta, já que a soma dos pesos é mantida igual a 1.

(ii.) Nas expressões usadas o termo $\overline{\overline{R}}_M > E_M$ não é alterado já que o nível de diversificação tende ao infinito.

(iii.) Aleatório $\overline{\overline{\theta}}$ tende a zero já que o nível de diversificação tende ao infinito.

(iv.) Dado qualquer valor positivo da diferença $D = (\overline{\overline{R}}_M > E_M)$, não importa o quão pequeno é inferido as observações (i.) e (iii.) que a condição da função (23) mantem-se uma vez que o nível de diversificação tende ao infinito.

(v.) Das observações (i) a (iii) o limite é dado por:

$$\lim_{L \to \infty} V(>) = \left(\sum_{j,h}^{n} \beta_j X_j \right)^2 \sum (\overline{\overline{R}}_{Mt} - E_M)^2 \rho(t) \tag{24}$$

2.2.2 Equação de semivariância de portfólio abaixo do valor médio

Como o nível de diversificação tende ao infinito, esta semivariância de portfólio tem um limite dado por:

$$\lim_{L \to \infty} V(<) = \sum_{j,h} [V_{jh} - \beta_j \beta_h V(\overline{\overline{R}}_M - E_M) X_j X_h] \tag{25}$$

considerando que:

V_{jh} é a covariância entre o *j*th e os ativos *h*th;

β_j e β_h são coeficientes beta para os ativos *j*th e *h*th, respectivamente;

$V(\overline{\overline{R}}_M - E_M)$ é a semivariância de portfólio de mercado acima do valor médio E_M.

Primeiro, é necessário rever que a variância do portfólio é expressa por:

$$V = \sum_{j,h} V_{jh} X_j X_h \tag{26}$$

Ballestero (2005) explica que a semivariância do portfólio abaixo do valor médio tem o limite definido por:

$$\lim_{L \to \infty} V(<) = V - \lim_{L \to \infty} V(>) \tag{27}$$

Ao levar as equações (19) e (26) em consideração, a equação (27) se torna a equação (25). Na prática, a equação (19) pode ser usada como a função (1) se o nível X_0 que garante a diversificação é visto como suficientemente pequeno pelo investidor não profissional. Em outras palavras, a fronteira eficiente com base na média-semivariância (abaixo do valor médio) é derivada do modelo de programação quadrática paramétrica:

$$\min \sum_{j,h} [V_{jh} - \beta_j \beta_h V(\overline{\overline{R}}_M - E_M) X_j X_h] \tag{27}$$

sujeito as condição de não-negatividade. Este modelo é resolvido computacional através do modelo Markowitz (1952).

3. Metodologia da pesquisa

O trabalho realizado por Ballestero (2005) fez uso de um exemplo numérico com informações de um mercado de ações hipotético com apenas dez ativos. O autor justifica sua escolha por dados hipotéticos afirmando que embora os mercados do mundo real incluam muito mais ativos, sua pesquisa busca auxiliar na aplicação do modelo proposto esclarecendo o processo computacional.

Para pesquisa foram selecionadas vinte e duas ações, constantes da carteira teórica do Ibovespa durante os quadrimestres no período de 2000 a 2004, e que estiveram presente em todas. As informações foram coletadas do banco de dados do Economática. Como definido na Seção 2, o portfólio de mercado *M* inclui todos os ativos negociados no mercado, cada um deles com pesos relacionados com a proporção a cada valor de mercado. Desta forma, ao selecionar as ações, adotou-se o índice Ibovespa como portfólio de mercado.

Em seu trabalho, Ballestero (2005) realizou os seguintes passos para definição do coeficiente beta:

(a) O valor médio do portfólio de mercado (EM) é definido por:

$$E_M = \sum_{j=1}^{n} E_j X_{j,M} \tag{28}$$

$$n = 10$$

onde E_j é o valor médio do ativo *j*th, X_{jM} é o portfólio de mercado (j = 1, 2, … 10), para dez ativos. Ao contrário do trabalho de Ballestero (2005), o valor médio do portfólio de mercado (EM) é definido a partir da média aritmética dos retornos obtidos através do Ibovespa.

Todos os dados numéricos requeridos são disponibilizados na Tabela 1. No início da tabela encontram-se os retornos médios de cada ação selecionada.

(b) A variância do portfólio de mercado (σ_M^2) para Ballestero (2005) é definida por:

$$\sigma_M^2 = (X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})\{V_{jh}\}(X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})' \tag{29}$$

onde $(X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})$, representa o valor dos pesos do portfólio de mercado;

$\{V_{jh}\}$ representa a matriz covariância;

$(X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})'$ é o vetor transposto dos pesos do portfólio de mercado;

No modelo operacional de Ballestero (2005) os dez ativos representavam o mercado *M*. As vinte e duas ações selecionadas não representam totalmente o mercado, de forma de que, a variância do mercado passa a ser definida por:

$$\sigma_M^2 = \sum_{t=1}^{n} (\overline{\overline{R}}_M - \overline{R}_M)^2 \rho(t)$$

(b) As covariâncias com o portfólio de mercado são definidas na equação abaixo. Cada ativo *j*th apresenta uma covariância com o portfólio de mercado, definida por cov (*j, M*). As dez covariâncias para Ballestero (2005) são definidas por:

$$(X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})\{V_{jh}\} \tag{30}$$

Pelo mesmo motivo, exposto anteriormente, a covariância com o portfólio de mercado passa a ser definida por:

$$Cov(j, M) = \sum_{t=1}^{n} (\overline{\overline{R}}_{jt} - \overline{R}_j)(\overline{\overline{R}}_{Mt} - \overline{R}_M)\rho(t)$$

(d) O coeficiente beta é definido pela equação (7). Os resultados numéricos aparecem no final da tabela 1.

A semivariância do portfólio de mercado acima do valor médio, que tem sido denotado por $V(\overline{\overline{R}}_{Mt} - \overline{R}_M)$ é definida através de três passos. A saber:

Primeiro passo. Os 60 retornos mensais observados para o portfólio de mercado são classificados em dois grupos:

1. aqueles maiores que o valor médio E_M, ou seja, retornos satisfazendo $\overline{\overline{R}}_M > \overline{E}_M$;
2. aqueles menores que (ou igual a) ao valor médio E_M.

Segundo passo. Para cada retorno satisfazendo $\overline{\overline{R}}_M > E_M$ define-se o desvio quadrático por:

$$\Delta = (\overline{\overline{R}}_M - E_M)^2 \tag{31}$$

Terceiro passo. A partir da equação (31) define-se a semivariância de portfólio de mercado acima do valor médio com base:

$$V = (\overline{\overline{R}}_M > E_M)^2 = \sum \Delta / 60 \tag{32}$$

A soma é estendida a todos os retornos acima do valor médio E_M.

Com a informação numérica já computada, o objetivo da função (27) do modelo de programação quadrática paramétrica é especificado como segue:

$$\min(X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})\{V_{jh}(<)\}(X_{1M}, \ldots X_{jM}, \ldots X_{10M})' \tag{33}$$

Tabela 1 – Matriz de covariância para 22 ações e 60 observações mensais (janeiro de 2000 a dezembro de 2004)

Retorno Médio *j*	0,02199	0,03096	0,01746	0,03160	0,00893	0,02090	0,01681	0,01750	0,00897	0,00939	0,00583
	AMBEV	ARACRUZ	BRADESCO	BRASIL	CELESC	CEM-ON	CEM-PN	CESP-PN	ELETRO-ON	ELETRO-PNB	ELETROP-PN
AMBEV-PN	0,00506	-0,00042	0,00268	0,00210	0,00156	0,00185	0,00244	0,00524	0,00280	0,00253	0,00256
ARACRUZ-PNB	-0,00042	0,00481	0,00043	0,00136	0,00168	0,00084	0,00077	-0,00028	0,00010	-0,00002	0,00107
BRADESCO-PN	0,00268	0,00043	0,00688	0,00481	0,00391	0,00439	0,00530	0,00686	0,00527	0,00511	0,00699
BRASIL-ON	0,00210	0,00136	0,00481	0,00887	0,00404	0,00478	0,00566	0,00782	0,00644	0,00610	0,00768
CELESC-PNB	0,00156	0,00168	0,00391	0,00404	0,00835	0,00537	0,00623	0,00992	0,00631	0,00638	0,00981
CEMIG-ON	0,00185	0,00084	0,00439	0,00478	0,00537	0,00671	0,00694	0,00877	0,00739	0,00681	0,00887
CEMIG-PN	0,00244	0,00077	0,00530	0,00566	0,00623	0,00694	0,00880	0,01077	0,00926	0,00878	0,01063
CESP-PN	0,00524	-0,00028	0,00686	0,00782	0,00992	0,00877	0,01077	0,02507	0,01249	0,01190	0,01570
ELETROB-ON	0,00280	0,00010	0,00527	0,00644	0,00631	0,00739	0,00926	0,01249	0,01639	0,01446	0,01120
ELETROB-PNB	0,00253	-0,00002	0,00511	0,00610	0,00638	0,00681	0,00878	0,01190	0,01446	0,01347	0,01050
ELETROPO-PN	0,00256	0,00107	0,00699	0,00768	0,00981	0,00887	0,01063	0,01570	0,01120	0,01050	0,02315
EMBRAER-ON	0,00284	0,00191	0,00381	0,00457	0,00436	0,00391	0,00381	0,00798	0,00457	0,00364	0,00681
IPIRANGA PET	0,00148	0,00163	0,00421	0,00443	0,00526	0,00429	0,00454	0,00684	0,00398	0,00392	0,00661
ITAUBANC-PN	0,00285	0,00055	0,00486	0,00356	0,00290	0,00357	0,00419	0,00548	0,00443	0,00420	0,00490
ITAUSA-PN	0,00283	0,00118	0,00494	0,00445	0,00316	0,00375	0,00450	0,00565	0,00426	0,00411	0,00559
KLABIN-PN	0,00178	0,00023	0,00403	0,00407	0,00410	0,00291	0,00476	0,00667	0,00409	0,00476	0,00632
LIGHT-ON	0,00434	0,00205	0,00626	0,00740	0,01103	0,00881	0,01037	0,01825	0,00993	0,00903	0,01927
PETROB-ON	0,00166	0,00055	0,00323	0,00280	0,00287	0,00305	0,00319	0,00520	0,00424	0,00372	0,00547
PETROB-PN	0,00161	0,00053	0,00309	0,00315	0,00271	0,00336	0,00360	0,00493	0,00461	0,00412	0,00550
SID NAC-ON	0,00287	0,00254	0,00447	0,00531	0,00500	0,00452	0,00574	0,00626	0,00560	0,00548	0,00687
SID TUB-PN	0,00171	0,00163	0,00339	0,00406	0,00406	0,00323	0,00369	0,00542	0,00274	0,00228	0,00519
SOU. CRUZ-ON	0,00123	0,00013	0,00159	0,00264	0,00155	0,00193	0,00243	0,00238	0,00217	0,00214	0,00238
Retorno Médio *M*	0,00896		Variância *M*	0,00528			Semivariância Portfólio Mercado			0,00277	
Cov (j,M)	0,00248	0,00051	0,00481	0,00491	0,00479	0,00459	0,00557	0,00826	0,00618	0,00588	0,00816
Coeficiente Beta	0,47072	0,09736	0,91231	0,92956	0,90739	0,86954	1,05522	1,56451	1,17091	1,11365	1,54675

Retorno Médio j	0,02384	0,01631	0,02146	0,02390	0,02706	-0,00982	0,02515	0,02020	0,04039	0,04144	0,03234
	EMBRAER	IPIRANGA	ITAUBANC	ITAUSA	KLABIN	LIGHT	PETROB-ON	PETROB-PN	SID NAC	SID TUB	SOU. CRUZ-
AMBEV-PN	0,00284	0,00148	0,00285	0,00283	0,00178	0,00434	0,00166	0,00161	0,00287	0,00171	0,00123
ARACRUZ-PNB	0,00191	0,00163	0,00055	0,00118	0,00023	0,00205	0,00055	0,00053	0,00254	0,00163	0,00013
BRADESCO-PN	0,00381	0,00421	0,00486	0,00494	0,00403	0,00626	0,00323	0,00309	0,00447	0,00339	0,00159
BRASIL-ON	0,00457	0,00443	0,00356	0,00445	0,00407	0,00740	0,00280	0,00315	0,00531	0,00406	0,00264
CELESC-PNB	0,00436	0,00526	0,00290	0,00316	0,00410	0,01103	0,00287	0,00271	0,00500	0,00406	0,00155
CEMIG-ON	0,00391	0,00429	0,00357	0,00375	0,00291	0,00881	0,00305	0,00336	0,00452	0,00323	0,00193
CEMIG-PN	0,00381	0,00454	0,00419	0,00450	0,00476	0,01037	0,00319	0,00360	0,00574	0,00369	0,00243
CESP-PN	0,00798	0,00684	0,00548	0,00565	0,00667	0,01825	0,00520	0,00493	0,00626	0,00542	0,00238
ELETROB-ON	0,00457	0,00398	0,00443	0,00426	0,00409	0,00993	0,00424	0,00461	0,00560	0,00274	0,00217
ELETROB-PNB	0,00364	0,00392	0,00420	0,00411	0,00476	0,00903	0,00372	0,00412	0,00548	0,00228	0,00214
ELETROPO-PN	0,00681	0,00661	0,00490	0,00559	0,00632	0,01927	0,00547	0,00550	0,00687	0,00519	0,00238
EMBRAER-ON	0,01195	0,00480	0,00288	0,00328	0,00225	0,00947	0,00313	0,00256	0,00561	0,00515	0,00171
IPIRANGA PET	0,00480	0,01160	0,00358	0,00406	0,00371	0,00808	0,00362	0,00342	0,00432	0,00502	0,00139
ITAUBANC-PN	0,00288	0,00358	0,00460	0,00431	0,00333	0,00485	0,00265	0,00279	0,00434	0,00309	0,00164
ITAUSA-PN	0,00328	0,00406	0,00431	0,00491	0,00368	0,00534	0,00269	0,00286	0,00467	0,00339	0,00183
KLABIN-PN	0,00225	0,00371	0,00333	0,00368	0,01001	0,00684	0,00147	0,00181	0,00401	0,00427	0,00182
LIGHT-ON	0,00947	0,00808	0,00485	0,00534	0,00684	0,02570	0,00420	0,00413	0,00731	0,00745	0,00211
PETROB-ON	0,00313	0,00362	0,00265	0,00269	0,00147	0,00420	0,00561	0,00503	0,00300	0,00233	0,00110
PETROB-PN	0,00256	0,00342	0,00279	0,00286	0,00181	0,00413	0,00503	0,00491	0,00318	0,00252	0,00163
SID NAC-ON	0,00561	0,00432	0,00434	0,00467	0,00401	0,00731	0,00300	0,00318	0,01117	0,00646	0,00266
SID TUB-PN	0,00515	0,00502	0,00309	0,00339	0,00427	0,00745	0,00233	0,00252	0,00646	0,00950	0,00306
SOU. CRUZ-ON	0,00171	0,00139	0,00164	0,00183	0,00182	0,00211	0,00110	0,00163	0,00266	0,00306	0,00420
Retorno Médio M	0,00896		Variância M	0,00528		Semivariância Portfólio Mercado				0,00277	
Cov (j,M)	0,00508	0,00491	0,00393	0,00413	0,00435	0,00798	0,00362	0,00353	0,00526	0,00434	0,00189
Coeficiente Beta	0,96362	0,93100	0,74454	0,78306	0,82411	1,51159	0,68593	0,66831	0,99633	0,82300	0,35878

Da equação (33) deve-se computar a matriz de semivariância $\{V_{jh}(<)\}$, onde:

		AMBEV-PN	ARACRUZ-PNB	BRADESCO-PN	BRASIL-ON	CELESC-PNB	CEMIG-ON	CEMIG-PN	CESP-PN	ELETROBRAS-ON	ELETROBRAS-PNB	ELETROPAULO-PN
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AMBEV-PN	1	0,00444	-0,00054	0,00149	0,00089	0,00038	0,00072	0,00107	0,00320	0,00128	0,00108	0,00054
ARACRUZ-PNB	2	-0,00054	0,00479	0,00019	0,00111	0,00144	0,00061	0,00048	-0,00070	-0,00021	-0,00032	0,00066
BRADESCO-PN	3	0,00149	0,00019	0,00458	0,00246	0,00162	0,00219	0,00263	0,00291	0,00232	0,00230	0,00308
BRASIL-ON	4	0,00089	0,00111	0,00246	0,00648	0,00170	0,00254	0,00294	0,00380	0,00343	0,00324	0,00370
CELESC-PNB	5	0,00038	0,00144	0,00162	0,00170	0,00607	0,00319	0,00358	0,00599	0,00337	0,00358	0,00593
CEMIG-ON	6	0,00072	0,00061	0,00219	0,00254	0,00319	0,00462	0,00441	0,00501	0,00457	0,00413	0,00515
CEMIG-PN	7	0,00107	0,00048	0,00263	0,00294	0,00358	0,00441	0,00572	0,00620	0,00584	0,00553	0,00612
CESP-PN	8	0,00320	-0,00070	0,00291	0,00380	0,00599	0,00501	0,00620	0,01830	0,00742	0,00708	0,00900
ELETROBRAS-ON	9	0,00128	-0,00021	0,00232	0,00343	0,00337	0,00457	0,00584	0,00742	0,01260	0,01085	0,00619
ELETROBRAS-PNB	10	0,00108	-0,00032	0,00230	0,00324	0,00358	0,00413	0,00553	0,00708	0,01085	0,01004	0,00574
ELETROPAULO-PN	11	0,00054	0,00066	0,00308	0,00370	0,00593	0,00515	0,00612	0,00900	0,00619	0,00574	0,01653
EMBRAER-ON	12	0,00158	0,00165	0,00138	0,00210	0,00194	0,00159	0,00100	0,00381	0,00145	0,00067	0,00269
IPIRANGA PET	13	0,00027	0,00138	0,00186	0,00204	0,00292	0,00205	0,00183	0,00281	0,00096	0,00105	0,00262
ITAUBANCO-PN	14	0,00188	0,00035	0,00298	0,00164	0,00103	0,00178	0,00202	0,00226	0,00201	0,00191	0,00171
ITAUSA-PN	15	0,00181	0,00097	0,00296	0,00243	0,00119	0,00187	0,00221	0,00226	0,00173	0,00169	0,00224
KLABIN-PN	16	0,00071	0,00001	0,00195	0,00195	0,00203	0,00093	0,00235	0,00310	0,00142	0,00222	0,00279
LIGHT-ON	17	0,00237	0,00164	0,00245	0,00351	0,00723	0,00517	0,00595	0,01171	0,00504	0,00437	0,01280
PETROBRAS-ON	18	0,00077	0,00037	0,00150	0,00103	0,00115	0,00140	0,00119	0,00223	0,00201	0,00161	0,00254
PETROBRAS-PN	19	0,00074	0,00035	0,00141	0,00143	0,00103	0,00175	0,00165	0,00204	0,00245	0,00206	0,00264
SID NACIONAL-ON	20	0,00157	0,00228	0,00196	0,00274	0,00250	0,00212	0,00283	0,00195	0,00237	0,00241	0,00261
SID TUBARAO-PN	21	0,00064	0,00141	0,00131	0,00194	0,00199	0,00125	0,00129	0,00186	0,00007	-0,00026	0,00166
SOUZA CRUZ-ON	22	0,00076	0,00003	0,00069	0,00171	0,00065	0,00107	0,00138	0,00082	0,00101	0,00103	0,00085

Assim, por exemplo, o elemento *j*=5, *h*=2 (CELESC-PNB, ARACRUZ-PNB) apresenta seu valor numérico definido através da expressão:

$$V_{52} - \beta_5 \beta_2 V(\overline{\overline{R}}_M > E_M) = 0{,}00168 - 0{,}90739 \times 0{,}09736 \times 0{,}00277 = 0{,}00144$$

A minimização da equação (33) está sujeita as limitações das funções (2), (3) e (4) que é numericamente descrita como segue:

$$\begin{aligned}
&0{,}02199X_1 + 0{,}03096X_2 + 0{,}01746X_3 + 0{,}03160X_4 + 0{,}00893X_5 + 0{,}02090X_6 + \\
&0{,}01681X_7 + 0{,}01750X_8 + 0{,}00897X_9 + 0{,}00939X_{10} + 0{,}00582X_{11} + 0{,}02384X_{12} + \\
&0{,}01631X_{13} + 0{,}02146X_{14} + 0{,}02390X_{15} + 0{,}02706X_{16} + (0{,}00982X_{17}) + 0{,}02515X_{18} + \\
&0{,}02020X_{19} + 0{,}04039X_{20} + 0{,}04144X_{21} + 0{,}03242X_{22} = E_0
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{22} Xj = 1 \qquad Xj \leq 0{,}00 \qquad para \qquad j = 1{,}2{,}3...{,}22$$

Ballestero (2005) explica que os portfólios selecionados por fundos mútuos, nos Estados Unidos, podem ser diversificados até o limite de 15%. Assim, este limite implica a participação percentual máxima do ativo no portfólio. Para a pesquisa adotou-se um limite para diversificação superior à zero para cada ativo com a condição de que a soma das participações dos ativos não excedam a 100%.

4. Resultados obtidos na pesquisa

Cada nível E_0,, considerado como alvo de retorno, conduz a um portfólio eficiente de média-semivariância cuja participação percentual no portfólio aparecem na tabela 2 e tabela 3.

Tabela 2. Composição das carteiras com base na média-semivariância

Semivariância - Modelo Ballestero			
Retorno Alvo	CDI = 1,43%	IBOV = 0,90%	IBX = 1,59%
	Participação %		
AMBEV-PN	0,18703	0,06897	0,20588
ARACRUZ-PNB	0,02221	0,00000	0,06491
BRADESCO-PN	0,13451	0,15158	0,12695
BRASIL-ON	0,00000	0,00000	0,00000

CELESC-PNB	0,23591	0,20947	0,22176
CEMIG-ON	0,00000	0,00000	0,00000
CEMIG-PN	0,00000	0,00000	0,00000
CESP-PN	0,00000	0,00000	0,00000
ELETROBRAS-ON	0,00000	0,00000	0,00000
ELETROBRAS-PNB	0,06375	0,12124	0,05784
ELETROPAULO-PN	0,00000	0,00000	0,00000
EMBRAER-ON	0,00000	0,00000	0,00000
IPIRANGA PET	0,03286	0,01711	0,03199
ITAUBANCO-PN	0,00000	0,00000	0,00000
ITAUSA-PN	0,00000	0,00000	0,00000
KLABIN-PN	0,00000	0,00000	0,00000
LIGHT-ON	0,08754	0,23879	0,05889
PETROBRAS-ON	0,00000	0,00000	0,00000
PETROBRAS-PN	0,23618	0,19284	0,23179
SID NACIONAL-ON	0,00000	0,00000	0,00000
SID TUBARAO-PN	0,00000	0,00000	0,00000
SOUZA CRUZ-ON	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 3. Composição das carteiras com base na média-variância

Variância - Modelo Markowitz			
Retorno Alvo	CDI = 1,43%	IBOV = 0,90%	IBX = 1,59%
		Participação %	
AMBEV-PN	0,27574	0,17261	0,28428
ARACRUZ-PNB	0,01649	0,00000	0,06465
BRADESCO-PN	0,01231	0,00000	0,01544
BRASIL-ON	0,00000	0,00000	0,00000
CELESC-PNB	0,34172	0,32176	0,31632
CEMIG-ON	0,00000	0,00000	0,00000
CEMIG-PN	0,00000	0,00000	0,00000
CESP-PN	0,00000	0,00000	0,00000
ELETROBRAS-ON	0,00000	0,00000	0,00000
ELETROBRAS-PNB	0,02032	0,07557	0,01619
ELETROPAULO-PN	0,00000	0,00000	0,00000
EMBRAER-ON	0,00000	0,00000	0,00000
IPIRANGA PET	0,00000	0,00000	0,00000
ITAUBANCO-PN	0,00000	0,00000	0,00000
ITAUSA-PN	0,00000	0,00000	0,00000
KLABIN-PN	0,00000	0,00000	0,00000
LIGHT-ON	0,08212	0,23536	0,05729
PETROBRAS-ON	0,00000	0,00000	0,00000
PETROBRAS-PN	0,25130	0,19469	0,24583
SID NACIONAL-ON	0,00000	0,00000	0,00000

SID TUBARAO-PN	0,00000	0,00000	0,00000
SOUZA CRUZ-ON	0,00000	0,00000	0,00000

Em adição, a tabela 3 mostra portfólios derivados do modelo Markowitz (1952) com o mesmo retorno alvo E_0 usados para derivar os portfólios de média-semivariância. Deste modo, os resultados de ambos os modelos média-semivariância e média-variância podem ser facilmente comparados. Isto significa que o investidor deve alterar a composição das ações conforme a definição do seu objetivo. Nos cenários as respectivas composições de portfólio são comparadas para três diferentes níveis de retorno alvo esperado, E_0 = Ibovespa, E_0 = IBX e E_0 = CDI, todos eles representando a média dos retornos no período da pesquisa. Observamos que não existiram coincidências de soluções para os dois modelos.

O último passo da pesquisa foi o de identificar se algum dos modelos consegue o maior retorno com menor risco. Desta forma, após a definição da composição de cada portfólio, foram calculados os retornos para cada um com base no retorno das ações selecionadas e sua participação percentual, para o período de janeiro a novembro de 2005, conforme Tabela 4. Além destas informações, o rendimento acumulado e o desvio-padrão do CDI, do Ibovespa e do Índice Brasil estão disponíveis para cada um deles.

Tabela 4 – Retornos obtidos no período de janeiro a novembro de 2005.

	Retorno Alvo Usado para Otimização do Portfólio		
	CDI	IBOV	IBX
Modelo Ballestero	38,62%	26,59%	39,71%
Desvio Padrão	6,07%	6,15%	5,90%
Modelo Markowitz	33,22%	18,48%	34,53%
Desvio Padrão	6,29%	6,22%	6,09%
Retorno Alvo	17,27%	21,97%	31,86%
Desvio Padrão	0,12%	5,68%	5,87%

Os portfólios definidos através do modelo Markowitz (1952) com base na média-variância, ao utilizar como parâmetro (retorno alvo) o CDI e o Índice Brasil, obtiveram rendimentos superiores, no período de janeiro a novembro de 2005, a esses respectivos parâmetros, não superando apenas o Ibovespa. Já os portfólios definidos através do modelo de Ballestero (2005) com base na média-semivariância, ao utilizarem o CDI, o Ibovespa e o Índice Brasil obtiveram rendimentos superiores, no mesmo período de análise, aos mesmos parâmetros. Quando comparados os dois modelos, as soluções propostas por Ballestero (2005) definem portfólios cujos retornos superam os retornos dos portfólios propostos pelo modelo de Markowitz (1952) além de superarem também os parâmetros CDI, Ibovespa e Índice Brasil, com a vantagem de apresentarem desvios-padrões similares.

5. Conclusões

A pesquisa teve o propósito de testar o modelo de programação definido por Ballestero (2005) no qual a função objetivo a ser minimizada, sujeita a confinamentos paramétricos padrão, conduz à fronteira eficiente com base na média-semivariância. O modelo recai sobre uma base empiricamente testada, qual seja, a diversificação de portfólios e a validade empírica da equação de regressão beta de Sharpe (1964) relacionando cada retorno do ativo ao mercado. Desta base, a matriz de semivariância do portfólio é derivada através de equações matemáticas, obtendo-se uma função objetivo quadrática sem recorrer à heurística.

Com base no artigo de Ballestero (2005) procurou-se aplicar a matriz de semivariância para ações negociadas na Bovespa e comparar as soluções obtidas com as soluções derivadas do modelo de Markowitz (1952), bem como avaliar os resultados obtidos por cada um desses modelos, tendo como parâmetro três diferentes retornos alvos definidos para a otimização dos portfólios, a saber, o CDI, o Ibovespa além do IBX.

Quando comparados os dois modelos entre si e com os parâmetros usados pelos modelos de otimização, as soluções encontradas pelo modelo de Ballestero (2005) definem portfólios cujos retornos superam os retornos dos portfólios propostos pelo modelo de Markowitz (1952) além de superarem também os parâmetros CDI, Ibovespa e Índice Brasil, no período de janeiro a novembro de 2005, com a vantagem de apresentarem desvios-padrões similares. Já o modelo de otimização proposto por Markowitz (1952) ao utilizar os parâmetros CDI, Ibovespa e Índice Brasil como retorno alvo conseguiu definir portfólios que superaram apenas os parâmetros CDI e Índice Brasil, não superando, entretanto, o Ibovespa.

Os resultados obtidos em relação à otimização de portfólios são semelhantes a aqueles relatados em Ballestero (2005) embora, neste último, as informações utilizadas são de um mercado de ações fictício. Em relação à possibilidade de coincidências na composição das participações percentuais dos ativos no portfólios não foram obtidas coincidências de soluções, conforme Ballestero (2005), que para sua pesquisa adotou sete diferentes parâmetros de otimização e desses, quatro apresentaram a mesma participação percentual dos ativos na definição dos portfólios. O autor explica que variância e semivariância quadrática podem alcançar valores no mesmo ponto. Assim, ficam alguns desafios para a próxima pesquisa na definição da existência ou não de coincidências de soluções, através do uso de um maior número de parâmetros para otimização dos portfólios.

REFERÊNCIAS

BALLESTERO, E. e ROMERO, C. **Multiple Criteria Decision Making and its Applications to Economic Problems**, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

BALLESTERO, E. Mean-Semivariance Efficient Frontier: A Downside Risk Model for Portfolio Selection. **Applied Mathematical Finance**, v.12, n.1, p.1-15, 2005.

BOND, S. A. e SATCHELL, S. E. Statistical properties of the sample semi-variance. **Applied Mathematical Finance**, n. 9, p. 219–239, 2002.

FISHBURN, P. C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. **American Economic Review**, n. 67, p. 116-126, 1977.

GROOTVELD, H e HALLERBACH, W. Variance vs downside risk: Is there really that much difference? **European Journal of Operational Research**, n. 114, p.304-319, 1999.

KALLBERG, J. C. e ZIEMBA, W. T. Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. **Management Science**, n.29, p. 1257–1276, 1983.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v.7, n.1, p. 77-91, mar. 1952.

NAWROCKI, D. Optimal algorithms and lower partial moments: Ex post results. **Applied Economics**, n. 23, p. 465-470, 1991.

______________ Portfolio analysis with a large universe of assets. **Applied Economics**, n. 28, p. 1191–1198, 1996.

PORTER, R. B. Semivariance and stochastic dominance: a comparison. **American Economic Review**, n. 64, p. 200–204, 1974.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **Journal of Finance**, n.19, p. 425–442, 1964.

SORTINO, F. A. e PRICE, L. N. Performance measurement in a downside risk framework. **Journal of Investing**, p. 59–65, 1994.

VON NEUMANN, J. e MORGENSTERN, O. **The Theory of Games and Economic Behavior**, 2nd Edition, Princeton: Princeton University Press, 1947.