

FRACTALIDADE EM SÉRIES TEMPORAIS: UMA APLICAÇÃO PARA UMA SÉRIE HISTÓRICA DE PREÇOS DE MINÉRIO DE COBRE

Autores:

MARCIA ATHAYDE MATIAS

(UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

CÉSAR AUGUSTO TIBÚRCIO SILVA

(PMIRPGCC - UNB/UFPB/UFPE/UFRN)

LEONARDO VIEIRA

(PMIRPGCC - UNB/UFPB/UFPE/UFRN)

Introdução

Ao longo dos últimos anos, com o objetivo principal de analisar risco e volatilidade em séries temporais de preços de *commodities* minerais, desenvolveram-se uma diversidade de estudos e pesquisas empíricas (WATKINS; MCALEER, 2004). Algumas destas pesquisas tiveram como base estudos consagrados, como por exemplo, a teoria dos estoques (FAMA; FRENCH, 1987), a análise da volatilidade de curto e longo prazo (MCMILLAN; SPEIGHT, 2001) e testes para analisar a hipótese de eficiência dos mercados de *commodities* (CHOWDHURY, 1991).

Nesse contexto, deve-se enfatizar o desenvolvimento de teorias alternativas originalmente desenvolvidas por outras áreas da ciência e posteriormente testadas em mercados financeiros, como é o caso da denominada *econophysics*, onde se tem a utilização de conhecimentos da física para os fenômenos econômicos (vide, por exemplo, TAKAYASU et al, 2000; DERMAN, 2004). Um tópico específico refere-se ao estudo do comportamento dos preços de um ativo. Nesse sentido, buscam-se técnicas que possam explicar a variação nos preços ao longo do tempo, incluindo, por exemplo, a *teoria dos fractais*. Essa será a abordagem desta pesquisa, que se utiliza da teoria dos fractais para tentar estudar com profundidade o comportamento dos preços de um ativo.

A introdução das discussões sobre a aplicação da teoria dos fractais na modelagem de preços de ativos se constitui em uma contribuição a pesquisa na área financeira, notadamente quanto à análise de risco e volatilidade. Assim, o objetivo deste trabalho é o estudo *ex post* do comportamento de uma série temporal de preços da *commodity* cobre do período entre 1974 e 2005, identificando empiricamente através de análise estatística se, para este período, este comportamento exibiu características fractais.

Além dessa introdução esse texto está assim estruturado: a próxima parte é uma revisão da literatura, e que apresenta um resumo de estudos embasados na teoria dos fractais, com ênfase em pesquisas que utilizaram séries temporais de *commodities* minerais. Posteriormente apresenta-se o proceder metodológico. A seguir é feita uma análise do minério de cobre, aspectos gerais e o histórico de comportamento de preços, sendo, depois, apresentados os dados e a análise estatística utilizada para detecção de propriedades fractais na série. Na última parte são apresentadas as conclusões da pesquisa.

Revisão da Literatura

A definição original Mandelbrot (1982) para fractais, é de um conjunto de elementos no qual a dimensão de Hausdorff Besicovitch excede a dimensão topológica. Essa dimensão deve-se a Hausdorff, matemático alemão que apresentou, em 1918, a possibilidade de que as dimensões possam ser números não inteiros, e a Besicovitch, matemático soviético, que formalizou a equação matemática. Uma definição popular, dada por Houaiss (2001) diz que “fractal é uma estrutura geométrica complexa cujas propriedades, em geral, se repetem em qualquer escala”. A palavra é derivada do latim *fractus*, que significa quebrar, fraturar.

Os primeiros desenhos de dimensão fractal foram apresentados no início do século XX. O mais famoso deles, a Curva de Koch, foi gerada em 1906 pelo matemático Helge Von Koch. Entretanto, somente com Benoit Mandelbrot ocorreu a identificação dos modelos matemáticos representativos dessas figuras. Esse pesquisador também foi responsável pelo termo *fractal* para identificá-las (LORENZ, 1996).

A propriedade mais característica do fractal é a auto-semelhança ou similaridade de escala. Isso significa dizer que as partes de um sistema possuem semelhanças com o sistema como um todo (LORENZ, 1996). Acredita-se que um processo fractal pode ser obtido em situações práticas, inclusive no mercado financeiro.

A existência de fractais tem sido associada ao caos. Lorenz (1996, p. 21) define caos como “comportamento que é determinístico, ou quase, (...) possuindo uma pequena aleatoriedade, mas que *não aparenta* ser determinístico” (grifo no original). Segundo Hsieh (1991) caos é um processo não-linear determinístico que aparenta ser aleatório. Isso motiva a pesquisa do estudo de caos no mercado, pois existe a possibilidade de identificar e explicar as flutuações que parecem randômicas. Para Lorenz (1996) os fractais teriam pouca relação com a teoria do caos no que diz respeito à aleatoriedade. Conforme afirma Lorenz (1996, p. 209), “alguns fractais chegam a quase ser classificados como caos por serem produzidos mediante regras descomplicadas, embora parecendo altamente complexas, e não apenas por aparentarem não convencionais”.

No entanto, é importante destacar que a geometria fractal foi adotada como instrumento matemático por parte da teoria do caos a partir da década de 1980 (MANDELBROT; HUDSON, 2004). Gleiser (2002) lembra que sistemas dinâmicos não-lineares, que possuem comportamento caótico determinístico, produzem figuras fractais; além disso, a questão da auto-similaridade é um fator importante dentro da teoria do caos.

A partir dessas considerações é possível perceber uma forte associação entre a fractalidade, o caos, a complexidade e a não-linearidade.

Com respeito à aplicação dos fractais no estudo dos preços de ativos, Mandelbrot (1963) desenvolveu um estudo pioneiro cujo objetivo era verificar o comportamento dos preços em situações especulativas. Esse autor analisou graficamente séries temporais diárias e mensais do algodão para o período de 1816 a 1950. Mandelbrot (1963) percebeu que os preços não seguiam uma distribuição normal e que as séries eram estacionárias, além dos gráficos terem a mesma aparência. Essa característica tornou-se fundamental para o desenvolvimento posterior da sua teoria sobre fractais.

Anos depois, Mandelbrot (1982) retorna ao seu trabalho original e apresenta uma expressão simplificada do *scaling principle of price change* (princípio da escala de mudança de preço). Esse autor comprovou que as séries temporais usadas no trabalho original eram estacionárias, com processo estável não-gaussiano de distribuição dos valores, preservando o mesmo aspecto, apenas com mudança na sua escala.

A utilização da técnica R/S nesta pesquisa deu-se em função do trabalho desenvolvido por Peters (1989), o qual adaptou a técnica original desenvolvida pelo hidrólogo Harold

Edwin Hurst. Hurst desenvolveu uma fórmula denominada *rescaled range analysis*, baseada em uma lei de potência para calcular o tamanho de reservatórios de água para o rio Nilo na década de 50. Peters (1989) adaptou a fórmula para a análise dos retornos mensais da SP 500, dos títulos do tesouro norte-americano e do retorno relativo das duas séries. Peters (1989) utilizou dados do período de 1950 a 1988 e comprovou que o desempenho do mercado possui persistência de memória, característica de situações onde existe o comportamento browniano fractal. Entretanto, Peters (1989) observou que essa situação não era tão significativa que permitisse uma projeção de resultados, sendo que o fator aleatório era mais relevante.

Desde o trabalho de Peters (1989), a técnica de R/S de Hurst tem sido utilizada para verificar a existência de fractalidade em uma série temporal.

Larrain (1991) usou informações trimestrais da taxa de juros dos *T-Bills* entre 1962 e 1989. Seu trabalho atestou a existência de não-linearidade, muito embora não tenha sido possível afirmar que a estrutura estudada seja caótica ou fractal. Corazza et al (1997) pesquisaram os preços de commodities futuros no período de 1981 a 1991 na Bolsa de Chicago. Esses autores aplicaram quatro testes, inclusive a técnica de R/S de Hurst e a técnica de Hurst refinada por Lo, denominada estatística $Z(n)$ (vide LO, 1991), obtendo um resultado que corresponde as propriedades fractais.

Barkoulas et al (1997) utilizaram uma série histórica de 21 *commodities* entre 1960 e 1994 para tentar descobrir a existência de dependência e memória de longo-prazo. Em lugar de utilizar a técnica R/S, os autores trabalharam com um modelo AFRIMA (p,d,q), sendo d o parâmetro de longa-memória. Entre as *commodities* analisadas, seis apresentaram evidências fractais: cobre, ouro, soja em grão, chá, lã e o índice UCAM, que corresponde a uma média ponderada de preços de exportação de *commodities* primárias de países em desenvolvimento. Retirando os *outliers* e tendo feito novos testes, verificou uma redução na evidência de fractalidade na série de lã e desaparecimento de indícios no cobre.

Panas (2002) usou o fechamento diário do preço de cobre, alumínio, zinco, níquel, estanho e chumbo, no período de 1989 a 2000, totalizando 2.987 observações. Todas as séries estudadas possuíam distribuição não-normal, com exceção do cobre e alumínio, fortemente estacionárias, com indicativos de autocorrelação. Para testar a fractalidade, Panas (2002) usou a estatística R/S, que mostrou indícios de fractalidade. Entretanto, uma vez que na presença de heterogeneidade a estatística R/S apresenta viés, o autor usou a estatística $Z(n)$. Os resultados foram positivos somente para o alumínio. Também testou as séries utilizando o modelo AFRIMA, que resultou em dependência de longo-prazo para alumínio e cobre, dependência de curto-prazo para níquel e chumbo e não persistência de memória para zinco e estanho.

Richards (2000) pesquisou a fractalidade em taxas de câmbio diárias de 18 moedas e três índices compostos norte-americanos, numa série de 30 anos de observações. O autor usou os métodos *state transition*, *ARI* e GARCH para verificar a volatilidade e irregularidade do período. Usou também o Filtro de Kalman. Todas as taxas apresentaram fortes evidências de não homogeneidade, enquanto os índices mostraram uma fraca evidência. O autor concluiu que existe fractalidade estocástica que possui forte composição aleatória. Na sequência de suas pesquisas, Richards (2004) realizou análises comparando o método ST-FRSR (*state transition-fitted residual scale ratio*) com métodos da família ARCH-GARCH e EGARCH em observações intradiárias de quatro séries de trinta anos de taxa de câmbio. Os testes mostraram fractalidade (não-homogeneidade) e simetria de escala, que revelaram uma presença fractal de moderada a fraca. Entre os modelos utilizados por Richards (2004), o ST-FRSR apresentou melhores resultados na modelagem e projeção, enquanto o EGARCH apresentou melhores resultados nas séries diárias.

Metodologia

A abordagem metodológica desta pesquisa é positivista e se fundamenta no pensamento de Popper de que a teoria científica será sempre conjectural e provisória (POPPER, 1999). Assim, esta pesquisa possui o status de apresentar uma nova abordagem para o tema estudado, enquanto ainda não contrariada pelos fatos, a exemplo das pesquisas anteriores realizadas sobre o comportamento de preços de ativos.

É um estudo misto que apresenta um componente bibliográfico e outro quantitativo. Os preços de minério de cobre utilizados nesta pesquisa foram disponibilizados pela COMEX e consistiram de uma série histórica de cotações diárias de preços do cobre em duas fontes: 1) para o período entre 05/06/1974 e 31/08/2001, as informações foram compradas de um banco de dados privado norte-americano; e, 2) para o período a partir de 04/09/2001, a partir do qual as informações passaram a ser publicamente disponibilizadas, até 30/12/2005 as informações foram coletadas diretamente do sítio da COMEX. No total são 7.922 observações diárias em 379 meses.

Por serem informações diárias, em dólar, não foram realizados ajustes em virtude da inflação do período, a exemplo do que ocorre nas pesquisas citadas na revisão bibliográfica.

Os resultados deste estudo são específicos da série histórica analisada, não devendo ser generalizados, uma vez que os fatores que influenciam o mercado de cada ativo são diferentes. No entanto, o estudo poderá servir de base para novos estudos empíricos.

Aspectos Gerais Sobre Minério de Cobre

O minério de cobre é utilizado pelo homem há mais de 7.000 mil anos. Até meados do século XIX, o comércio de cobre foi controlado pela Grã-Bretanha, que possuía maior tecnologia para tratamento do minério. Entretanto, ainda naquele século, foram descobertas novas minas nos Estados Unidos, Chile e Austrália. Este fato, aliado ao desenvolvimento de novas tecnologias de concentração, que permitiram o aproveitamento de minérios de baixo teor, resultou na expansão global do mercado de minério de cobre no século XX (NYMEX, 2005).

Entre suas utilizações, destaca-se a produção de fios e cabos elétricos, ligas especiais, tubos, laminados e extrudados. O cobre metálico é excelente condutor de eletricidade e calor, tendo vasta aplicação em diversos setores industriais, com destaque para os de construção civil, telecomunicações, eletroeletrônica, transmissão e distribuição de energia (ANDRADE ET AL, 2001).

Os preços da *commodity* cobre são ditados pela *London Metal Exchange – LME*, *Shanghai Stock Exchange – SSE* e pela *Commodity Exchange of New York - COMEX*, sendo a forma mais usual de transação através de contratos de operações futuras. Na COMEX os preços são cotados em US\$ cents/libra (centavos de dólar por libra-peso) de cobre contido em concentrado.

No Brasil, foi descoberta a primeira mina de cobre no sertão da Bahia em 1874, tendo sido fundado em 1969 o primeiro empreendimento para exploração do minério em Jaguarari – BA (PARANAPANEMA, 2005). As minas de cobre do Complexo Minerador de Carajás, no Pará, foram descobertas na década de 90, a partir da identificação de anomalias magnéticas que revelaram a existência de calcopirita, o principal minério de cobre (CVRD, 2006). Outros estados com pequenas produções são Tocantins, Goiás e São Paulo (DNPM, 2005).

No entanto, o Brasil, até 2003, não possuía produção expressiva de minério de cobre, com cerca de 32 mil toneladas frente a uma necessidade de 300 mil, importando cobre contido em concentrado do Chile, Argentina, Peru, Portugal e Indonésia, para abastecer as empresas produtoras de catodo e de semi-acabados de cobre no País (UDESC, 2005). A partir de 2004

começou a exploração em larga escala no Brasil com o início da abertura das minas de cobre no estado do Pará. A Companhia Vale do Rio Doce, empresa que está realizando investimentos na região, exportou em 2004 e em 2005, respectivamente 269 e 398 mil toneladas de concentrado de cobre a 30%, contendo aproximadamente 81 e 119 mil toneladas de minério contido (CVRD, 2006). De acordo com dados do DNPM (2005), o destino da produção de cobre de 2004 foi em 67,33% para atender o mercado externo e 32,68% para atender o mercado interno. Apesar do percentual expressivo de exportação, este ainda não foi suficiente para gerar saldo positivo na balança comercial deste minério, que apresentou em 2004 déficit na balança comercial de 312,11 mil toneladas, representando US\$ 292,46 mil.

Análise Histórica do Comportamento dos Preços de Minério de Cobre

Ao longo do tempo, a maior influência exercida sobre os preços mundiais do minério de cobre pode ser atribuída à relação existente entre a produção mundial do minério e sua demanda (EDELSTEIN, 1999). Através do gráfico 1 pode-se observar a evolução dos preços no período analisado.

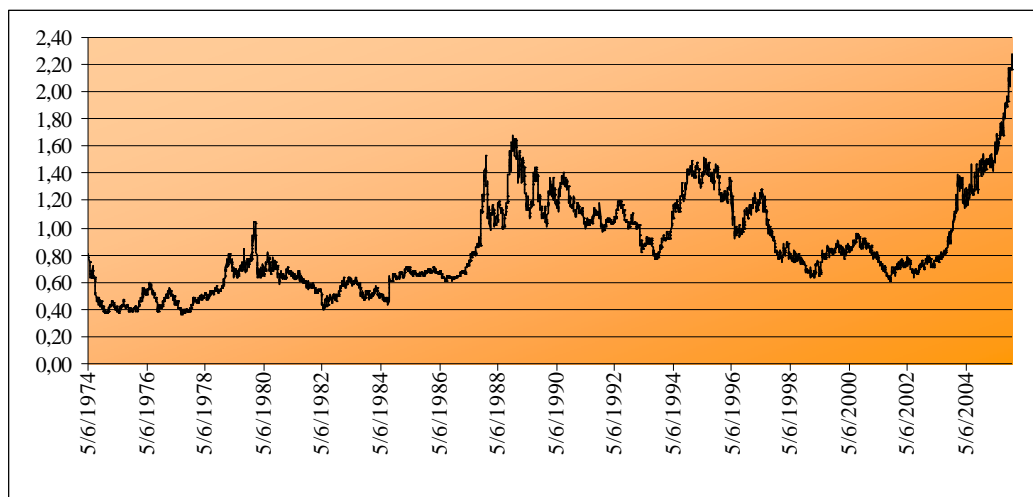


Gráfico 1. Preços da Commodity Cobre 1974 – 2005.

Fonte: COMEX - elaboração própria.

De acordo com Edelstein (1999), no final dos anos 60 e início dos anos 70, a demanda por minério de cobre estava alta, em função da guerra do Vietnã e do desenvolvimento acelerado que o mundo vivia, na chamada era de ouro do desenvolvimento mundial. Entre 1964 e 1974 a produção esteve ajustada à demanda e os preços mantiveram-se equilibrados com tendência de crescimento anual.

O período que se seguiu entre 1975 e 1986 foi marcado por um excedente de produção em relação à demanda pelo minério, provocando queda mundial e baixa volatilidade dos preços. Neste período fez-se uma exceção durante alguns meses do ano de 1980, nos quais houve alto volume de transações comerciais, associado a baixos níveis de estoques governamentais, o que provocou uma elevação de preços, mas a recessão mundial enfrentada durante os anos de 1981 a 1986 novamente voltaram a deprimir os preços do minério.

Durante o período de recessão associado com altos estoques e preços baixos, a indústria da mineração de cobre esteve estagnada, sem novos investimentos, com fechamento de minas ou paradas programadas de produção. Como consequência, no período que se seguiu a partir de 1987 foi marcado por baixos estoques e reaquecimento dos preços, chegando em dezembro de 1988 a US\$ 1,6613/lb, sua cotação máxima superada apenas 17 anos depois em junho de 2005.

Num padrão histórico de comportamento, a indústria voltou a investir e os estoques voltaram a crescer no início da década de 90, provocando queda dos preços a partir de 1992, chegando em seu menor nível em novembro de 1993 desde 1987.

A partir de 1994 os preços voltaram a subir devido ao aumento real de demanda provocado principalmente pelo desenvolvimento dos países asiáticos e em 1995 por operações de *corner* que elevaram os preços do cobre, conduzidas pelo banco japonês Sumitomo. Com a descoberta da manipulação por parte do banco os preços voltaram a cair e não se recuperaram, pois em 1997 iniciou-se a crise asiática.

À época da crise, os países do sudeste asiático eram responsáveis por 40% das importações mundiais de cobre refinado e 54,6% das importações de cobre contido em concentrado (ANDRADE, 1998). O valor da libra-peso do cobre contido que chegou a US\$ 1,2850 em junho de 1997, caiu para US\$ 0,639 em março de 1999.

Nos anos que sucederam a crise asiática, ainda que a utilização do minério de cobre tenha se intensificado no setor de eletroeletrônico e em novas áreas de tecnologia, como sistemas de aquecimento e equipamentos médicos, a recuperação dos preços se deu a partir de 2002, com o intenso crescimento da China, que provocou uma forte descompensação entre a demanda e a capacidade de produção mundial, fato que acarretou no período entre 2002 e 2005 aumento superior a 200% nos preços mundiais do minério. Adicionalmente, Prates (2003) afirma que a desvalorização do dólar frente ao euro e ao iene resulta em preços mais baixos para os países europeus e para o Japão, fomentando a demanda por estes bens, a demanda também tem sido fomentada pela expectativa confiante de retomada de crescimento dos países centrais e pelas compras especulativas por parte de fundos de hedge, estes fatos se contrapondo a lenta resposta dos produtores mundiais de minérios.

De acordo com as estimativas do International Copper Study Group (apud CVRD, 2006) houve déficit de 705 mil toneladas de cobre em 2004, o que se seguiu a um desequilíbrio entre demanda e produção de 386 mil toneladas em 2003, e os estoques conhecidos de cobre estão em seu menor nível dos últimos 18 anos.

Sobre o comportamento dos preços futuros, os analistas se dividem em duas tendências: 1) a tendência de alta persiste com o processo de industrialização da Índia, ou seja, após o *boom* de desenvolvimento e crescimento da China, com subsequente acomodação da produção anual, o desenvolvimento da Índia continuará criando uma defasagem nos estoques em relação à demanda mundial (ELLIOT, 2006); 2) como em toda a história dos preços de cobre, ciclos de altos preços e baixos estoques são seguidos por ciclos de altos estoques e baixos preços (VALOR ECONÔMICO, 2006).

Análise Estatística para Detecção de Propriedades Fractais na Série Temporal

A série histórica analisada contém cotações diárias de preços de minério de cobre do período entre 05/06/1974 e 30/12/2005, em um total de 7.922 observações diárias em 379 meses. A série utilizada neste estudo não foi deflacionada, conforme comentado anteriormente. Entre as razões para não deflacionar, pode-se citar o fato de que, *a priori*, os preços negociados na COMEX refletem o resultado de negociações em nível mundial, de níveis de estoque e de crises especulativas a que a bolsa de *commodities* está sujeita. Foi observado durante a revisão da literatura que pesquisas publicadas sobre comportamento de preços não tiveram suas séries temporais deflacionadas.

O gráfico 2 revela o padrão de crescimento e decréscimo dos preços ao longo do tempo, com picos de oscilação periódicos. Os preços saíram do patamar de US\$ 0,78/lb em junho de 1974 para alcançar US\$ 2,1615/lb no final de dezembro de 2005, após ciclos de preços altos e baixos. Maiores valores alcançados em fevereiro de 1980: US\$ 1,035/lb;

dezembro de 1988: US\$ 1,661/lb; agosto de 1995: US\$ 1,485/lb. A média dos preços no período US\$ 0,862/lb com desvio padrão de 0,3311. O retorno dos preços foi calculado através do logaritmo natural do quociente entre os preços de dois dias consecutivos. O retorno médio foi de 0,013% por dia, com desvio padrão de 1,63% em relação à média. A variação dos preços chegou a 177,1% no período total da amostra.

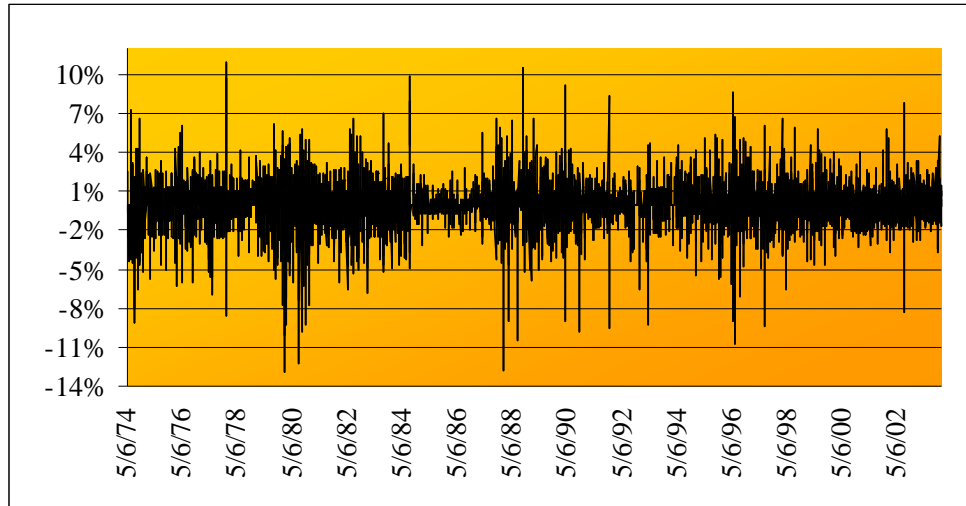


Gráfico 2 – Retornos dos Preços da *Commodity* Cobre
Fonte: COMEX - elaboração própria.

A presença de fractalidade em séries temporais é caracterizada pela distribuição não-gaussiana dos retornos diários em relação à média; não-linearidade da série temporal; e, persistência de memória de longo prazo. A fim de detectá-las na série temporal estudada, é necessário aplicar testes estatísticos específicos que permitirão identificar o grau de fractalidade que a série apresenta.

Normalidade

A teoria dos fractais tem como premissa a distribuição não-normal das variáveis no tempo. Brooks (2002) apresenta o teste de normalidade de Bera-Jarque como o mais usualmente utilizado. Este teste permite analisar a distribuição das variáveis sob dois pontos: assimetria e curtose. O primeiro permite medir a extensão a qual a distribuição possui simetria em relação à própria média da série. O segundo compara a distribuição de frequências da amostra com a distribuição normal (Laponni, 2000). Neste sentido, a distribuição normal é simétrica e mesocúrtica.

O teste de Bera-Jarque é realizado a partir dos resultados de assimetria e curtose. Considera-se a tabela do χ^2 , com dois graus de liberdade e significância de 5%. O teste é dado pela seguinte equação:

$$W = N \left[\frac{\text{ass}^2}{6} + \frac{(\text{curt} - 3)^2}{24} \right]$$

Onde: N é o tamanho da amostra. As hipóteses levantadas são:

H_0 : $W < 5,991$; distribuição normal.

H_1 : $W \geq 5,991$; distribuição não-normal.

Obtiveram-se os resultados da assimetria, curtose e da estatística de Bera-Jarque a partir da série histórica dos preços e dos retornos dos preços do minério de cobre. Os valores

indicam que H_0 foi rejeitada em favor de H_1 , em ambos os casos, preços e retornos. A figura 4 representa o output do software para a distribuição dos preços, a qual se mostrou platicúrtica com assimetria negativa (à esquerda).

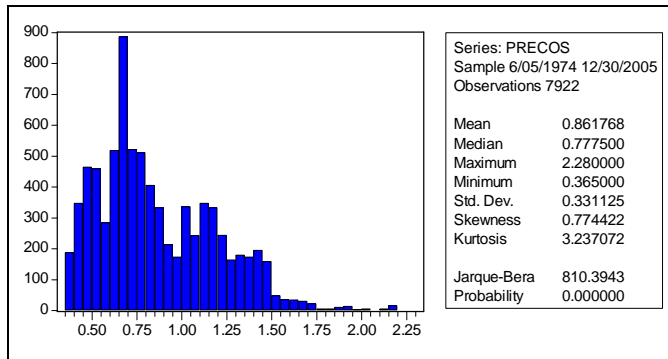


Figura 4. Histograma dos Preços da Commodity Cobre

Fonte: Elaboração própria (Software *Eviews*).

A figura 5 representa o output do software para a distribuição dos retornos dos preços, a qual se mostrou leptocúrtica com assimetria positiva (à direita).

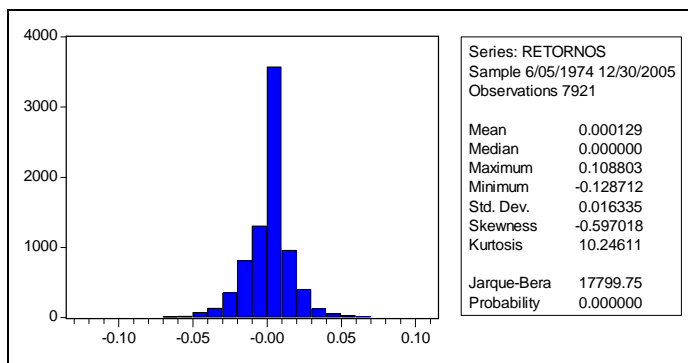


Figura 5. Histograma dos Retornos dos Preços da Commodity Cobre

Fonte: Elaboração própria (Software *Eviews*).

Linearidade

Considerando a propriedade não-linear das séries temporais com características fractais, é necessária a aplicação de um teste para identificar se as variáveis que compõem a série são, ou não, independentes e identicamente distribuídas – IID. A não-normalidade da distribuição dos preços sugere que a série é não-linear. O teste aplicado é o BDS (Brock, Dechert, Scheinkman e LeBaron), que pode detectar várias situações em que as variáveis não são IID, tais como não-estacionariedade, não-linearidade e caos determinístico (Brooks, 2002).

O teste utiliza os resíduos da série e se baseia no conceito de integral de correlação $C_m(\delta)$, consiste na análise da distância de um ponto qualquer escolhido (δ) e uma seqüência de pares pontos formados a partir da amostra (s, t), (s : valor, t : tempo). Se as observações forem IID, a probabilidade de a distância entre qualquer par de pontos ser menor ou igual a (δ) é constante. Esta probabilidade é denotada por $C_m(\delta)$.

O valor crítico para rejeição da hipótese nula para o nível de significância de 5% é igual ou maior a 1,96 (distribuição bicaudal - valor absoluto). As hipóteses levantadas são:

H_0 : a série histórica possui variáveis IID indicando que o modelo possui características lineares;

H_1 : a série histórica não possui variáveis IID indicando que o modelo possui características de não-linearidade.

O teste BDS indica que os preços não possuem resíduos IID, rejeitando a hipótese nula em favor de H_1 , para qualquer simulação de (δ) utilizada. Nos anexos deste trabalho estão as estatísticas do teste.

Estacionaridade

Mandelbrot et al (1997) define a estacionaridade como uma das características básicas do comportamento de séries temporais fractais. De acordo com Brooks (2002), um processo é considerado estacionário se suas média, variância e autocovariância se mantêm constantes ao longo do tempo. Estatisticamente, a presença de uma ou mais raízes unitárias indica não-estacionaridade no comportamento de uma série histórica, este fenômeno pode ser detectado através do teste Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Dada uma equação estocástica:

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + u_t$$

Para a qual se têm: $\phi \geq 1$: comportamento não-estacionário; e, $\phi < 1$: comportamento estacionário. O valor crítico para observação do resultado do teste ADF é de -2,86 para o nível de significância de 5%, sendo rejeitada a hipótese nula em favor da estacionaridade para resultados mais negativos do que o valor crítico. As hipóteses levantadas são:

H_0 : existem raízes unitárias, comportamento não-estacionário;

H_1 : não existem raízes unitárias, comportamento estacionário.

O resultado da aplicação do teste ADF na série de preços indica para a existência de uma raiz unitária, implicando em não rejeição da hipótese nula de que existem raízes unitárias e comportamento da série é não-estacionário. Realizado novamente o teste a partir da primeira diferença da série, aceitou-se a hipótese alternativa para não existência de raízes unitárias. Mandelbrot et al (1997, p. 372) argumenta que séries temporais, de fato, não “parecem” estacionárias, assumindo que as séries podem apresentar diferentes variâncias em diferentes momentos do tempo, necessitando de um modelo estatístico preciso que capture as mudanças de preços. Admite, porém (MANDELBROT ET AL, 1997, p. 404), que a predição de preços somente é possível a partir de uma amostra estacionária. O resultado deste teste é apresentado nos apêndices deste trabalho.

Persistência de Memória

Nesta pesquisa será utilizada a técnica *rescaled range* (R/S) de Hurst apresentada por Peters (1989) para avaliar a persistência de memória na série de preços diários do cobre. A escolha por este teste é fruto da observação de sua aplicação com êxito em outras pesquisas envolvendo séries temporais de preços. O resultado, representado pela letra H, é o fator da lei de potência que representa a série, chamado de *Expoente de Hurst*, variando entre zero e um, com as seguintes implicações para séries temporais:

$H = 0,5$ implica em comportamento puramente aleatório;

H entre zero e 0,5 implica em comportamento não persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa; e,

H maior que 0,5 ($0,5 < H \leq 1$) implica em comportamento persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de continuar positiva e vice-versa, e o nível desta persistência é medido quão maior for o resultado de 0,5.

Encontra-se H a partir da regressão:

$$\mathbf{Log(R/S) = \alpha + \beta \mathbf{Log(N)}}$$

Para a qual são calculados valores de x e y de acordo com o número de observações da amostra, sendo (R/S) a divisão da amplitude entre a maior e a menor ocorrência registrada (R), pelo desvio padrão encontrado na série (S) e N é o número de observações. Assim, $H = b$. Através da ferramenta Excel, são calculados os valores de x (Log(N)) e y (Log(R/S)), tendo sido definidos tantos valores quanto o número de observações da amostra, ou seja, para cada nova observação (incremento de tempo) são calculados novos valores para x e y. Na seqüência, para a realização da regressão linear, também é utilizada a ferramenta Excel.

O resultado obtido com a realização do teste de Hurst foi de $H = 0,36$ para a série temporal de minério de cobre, o que implica em comportamento não persistente, de curto prazo, com tendência de reversão, indicando a presença de fator aleatório com fracos indícios de fractalidade, conforme resultados apresentados. Nos apêndices deste trabalho estão as estatísticas do teste.

Análise Geral dos Resultados

Os resultados obtidos com os testes sugerem que os preços não são estatisticamente independentes e identicamente distribuídos - IID, tampouco a distribuição assumiu a forma de curva normal. Estas primeiras características levam a se acreditar em um comportamento fractal. A estatística de Hurst demonstra que a série possui dependência de seus preços passados num padrão de memória curta, com tendência de reversão. Por fim, os testes para raízes unitárias não foram rejeitados, implicando em comportamento não-estacionário.

No conjunto, estas evidências são suficientes para se afirmar que a série temporal apresentou, durante o período analisado, um padrão fractal de comportamento. No entanto, não se pode ignorar o fator aleatório presente na série. O quadro abaixo apresenta o resumo dos resultados dos testes estatísticos.

Teste Estatístico	Resultado	Interpretação
Bera-Jarque - preços	810,40	Distribuição não-normal
Bera-Jarque - retornos	17.799,75	Distribuição não-normal
BDS	0,0000	Não linearidade
Estacionaridade	- 0,069452	Não-estacionário
Rescaled range (R/S)	0,3653	Indícios de fractalidade

Quadro 1: Resumo dos Resultados dos Testes Estatísticos.

Fonte: Elaboração própria.

Conclusões

As análises histórica e empírica do comportamento de preços da commodity cobre do período entre 1974 e 2005 permitem que se façam algumas observações: existe uma lacuna entre o fato do comportamento dos preços apresentar-se não-linear, com distribuição não-gaussiana das variáveis e a existência de padrões fractais em uma série temporal. Ou seja, não-linearidade e não-normalidade são condições recorrentes em padrões fractais, mas não suficientes para afirmar a existência de fractalidade. Segundo, a análise histórica revelou um padrão de comportamento cíclico ao longo dos anos, dado pelos períodos de aumento de demanda, seguido pelo aumento de produção com conseqüente queda dos preços, fato social que induz à idéia de não persistência de memória entre investidores, indústrias e mineradoras.

Esta pesquisa se alinha a pesquisas anteriores sobre presença de fractais em séries financeiras, em muitas das quais os resultados ora se mostraram confusos ora contraditórios, talvez por falta de desenvolvimento de ferramentas matemáticas capazes de identificar com

maior precisão a fractalidade presente nas séries, talvez realmente pelo componente aleatório ser mais persistente.

De fato a teoria fractal é relativamente recente e ainda são poucas as pesquisas sobre fractais aplicados ao mercado financeiro, no entanto, na escala do conhecimento, verifica-se uma evolução quando se analisam seus pressupostos à luz dos primeiros enunciados, de variações de preços que seguiam padrões *random walk* com distribuição normal e comportamento linear.

Conclui-se que, a despeito de algumas teorias estabelecidas permanecerem como referência importante para o entendimento histórico da evolução da ciência, faz-se mister que o comportamento de preços seja estudado sob novas perspectivas, como a teoria dos fractais que se apresentou nessa pesquisa.

Referências

ANDRADE, M. L. **Informe Setorial Mineração e Metalurgia**. BNDES: Rio de Janeiro, n.16, jun. 1998.

_____, M. L.; CUNHA, L. M. S.; GANDRA, G. T. O Cobre Brasileiro em Ascensão no Cenário Mundial. **BNDES Setorial**, Rio de Janeiro, n. 13, p. 65-94, mar. 2001.

BARKOULAS, J.; LABYS, W. C.; ONOCHIE, J. *Fractional Dynamics in International Commodity Prices*. **The Journal of Futures Markets**. v. 17, n. 2, p.161, abr. 1997.

BROOKS, C. **Introductory Econometrics for Finance**. Cambridge University Press. United Kingdom: 2002.

CHANG, E. C.; CHEN, C.; CHEN, S. *Risk and Return in Copper, Platinum, and Silver Futures*. **The Journal of Futures Markets**. v. 1, nº 1, fev. 1990, p.29-39.

Companhia Vale do Rio Doce. Rio de Janeiro, Brasil. Disponível em: <<http://www.cvrld.com.br>>.

CORAZZA, M. ET AL. *Searching for fractal structure in agricultural futures markets*. **The Journal of Futures Markets**. v. 17, n. 4, p. 433-473, jun. 1997.

CHOWDHURY, A. R. *Futures Market Efficiency: Evidence for Cointegration Tests*. **The Journal of Futures Markets**. v. 11, nº 5, out. 1991, p.577-589.

DERMAN, E. **My life as a Quant**. Hoboken: John Wiley, 2004.

DNPM. **Anuário Mineral Brasileiro 2005**. Disponível em: <http://www.dnpm.gov.br/assets/galeriaDocumento/AMB2005/2_Parte_I%202005%20Brasil.pdf>, acesso em 30/01/2006.

EDELSTEIN, Daniel. *Metal prices in the United States through 1998 – Copper*. **USGS Minerals Information Team. Special Publication**, 1999.

ELLIOT, G. *Strong Commodity Markets and the supply side response*. **Rio Tinto Presentation. Citigroup Conference**. March, 2006. Disponível em: <<http://www.riotinto.com>>.

FAMA, E.; FRENCH, K. R. *Commodities Future Price: Some Evidence of Forecast Power, Premiums and Theory of Storage*. **The Journal of Business**. v. 60, nº 1, jan.1987.

GLEISER, Ilan. **Caos e complexidade: a evolução do pensamento econômico**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

Grupo Paranapanema S.A. **Mineração Caraíba**. Bahia, Brasil. Disponível em: <<http://www.paranapanema.com.br/caraiba/default.asp>>.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss**. São Paulo: Objetiva, 2001.

HSIEH, David. *Chaos and nonlinear dynamics application to financial markets*. *The Journal of Finance*. v. XLVI, no. 5, dez. 1991, p. 1839-1877.

LAPPONI, J. C. **Estatística Usando Excel**. Laponi Treinamento e Editora Ltda. São Paulo: 2000.

LORENZ, E. N. **A Essência do caos**. Tradução de Cláudia Bentes David. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1996.

LARRAIN, M. *Testing chaos and nonlinearities in T-Bill rates*. *Financial Analysts Journal*. v. 47, n.5, p.51, set/out. 1991.

LO, A. *Long-term memory in stock market prices*. *Econométrica*. v. 59, p. 1279-1313, 1991.

MANDELBROT, B. B. *The variation of certain speculative prices*. *The Journal of Business*. v. 36, n. 4, p. 394, out. 1963.

_____. *The fractal geometry of nature: updated and Augmented*. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.

_____.; FISCHER, Adlai.; CALVET, Laurent. *A Multifractal Model of Asset Return*. *Cowles Foundation Discussion Paper*. n. 1164, Set/1997.

_____.; HUDSON, R. **Mercados financeiros fora de controle: a teoria dos fractais explicando o comportamento dos mercados**. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

MÜLLER, U. A.; DACOROGNA, M. M.; DAV, R. D.; PICTET, O. V.; OLSEN, R. B.; WARD, J. R. *Fractals and intrinsic time: a challenge to econometricians*. In *XXXIXth International Conference of the Applied Econometrics Association (AEA)*, 1993, Luxembourg. **Anais...** Luxemburg, 1993.

MCMILLAN, D. G.; SPEIGHT, A. E. H. *Non-ferrous Metals Price Volatility: a component analysis*. *Resource Policy*. v. 27, 2001, p.199-207.

NYMEX - New York Mercantile Exchange. USA. Disponível em: <<http://www.nymex.com>>.

PANAS, E. *Long memory and chaotic models of prices on the London Metal Exchange*. *Resources Policy*. v. 27, p.235-246, 2002.

PETERS, E. E. *Fractal Structure in the Capital Markets*. *Financial Analysts Journal*. v.45, n.4, p.32, jul/ago. 1989.

_____. E. E. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1994.

POPPER, K. R. **Conhecimento objetivo: uma abordagem evolucionária**. Tradução de Milton Amado. Belo Horizonte: Editora Itatiaia, 1999.

PRATES, D. M. **Determinantes do Saldo Comercial**. **Política Econômica em Foco**. Suplemento 5 do boletim quadrimestral do Centro de Estudos de Conjuntura e Política Econômica da Unicamp, n. 1, out, 2003.

RICHARDS, G. R. *The fractal structure of exchange rates: measurement and forecasting*. *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*. v.10, p. 163-180, 2000.

_____. *A Fractal forecasting model for financial time series. Journal of Forecasting*. n. 23, p.587-602, 2004.

TAKAYASU, H.; OKAZAKI, M. P.; MARUMO, K e SHIMIZU, T. *Fractal properties in Economics. In: M.M. Novak, Editor, Paradigm of Complexity*. Singapore: World Scientific, 2000

Universidade do Estado de Santa Catarina, UDESC. **Dicionário**. Santa Catarina, Brasil. Disponível em: <<http://www.mundofisico.joinville.udesc.br/>>, acesso em 30/01/2006.

VALOR ECONÔMICO S/A. São Paulo: Globo, ano 6, n. 1452, fev, 2006.

WATKINS, C.; MCALEER, M. *Econometric Modeling of Non-ferrous Metal Prices. Journal of Economic Surveys*. v.18, nº 5, 2004.

Apêndice

Teste BDS

BDS Test for PRECOS					
Date: 04/12/06 Time: 12:48					
Sample: 6/05/1974 12/30/2005					
Included observations: 8238					
Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Prob.	
2	0.202139	0.000666	3.035.833	0.0000	
3	0.343705	0.001051	3.268.948	0.0000	
4	0.442310	0.001244	3.556.935	0.0000	
5	0.510674	0.001287	3.967.872	0.0000	
6	0.557826	0.001232	4.526.617	0.0000	
Raw epsilon		0.436539			
Pairs within epsilon		38684487	V-statistic	0.702066	
Triples within epsilon		2.13E+11	V-statistic	0.521578	
Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))^k
2	19138790	0.694962	19332981	0.702013	0.492823
3	18987486	0.689654	19327416	0.702001	0.345949
4	18858396	0.685150	19321867	0.701988	0.242839
5	18742589	0.681126	19316246	0.701973	0.170452
6	18636755	0.677462	19310605	0.701957	0.119637

Teste ADF 1ª diferença

Null Hypothesis: PRECOS has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=35)				
		t-Statistic	Prob.	
Augmented Dickey-Fuller test st		-0.069452	0.9509	
Test critical values:	1% level	-3.430.999		
	5% level	-2.861.711		
	10% level	-2.566.903		
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(PRECOS)				
Method: Least Squares				
Date: 10/05/06 Time: 16:57				
Sample (adjusted): 6/11/1974 10/14/2004				
Included observations: 7918 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PRECOS(-1)	-3.76E-05	0.000541	-0.069452	0.9446
D(PRECOS(-1))	-0.022921	0.011239	-2.039.368	0.0414
D(PRECOS(-2))	-0.046687	0.011241	-4.153.225	0.0000
C	0.000215	0.000499	0.431253	0.6663
R-squared	0.002663	Mean dependent var		0.000171
Adjusted R-squared	0.002285	S.D. dependent var		0.015930
S.E. of regression	0.015912	Akaike info criterion		-5.443.040
Sum squared resid	2.003.641	Schwarz criterion		-5.439.516
Log likelihood	21553.00	F-statistic		7.044.613
Durbin-Watson stat	1.997.980	Prob(F-statistic)		0.000100

Regressão Linear para levantamento do Expoente de Hurst

RESUMO DOS RESULTADOS								
<i>Estatística de regressão</i>								
R múltiplo	0,4933							
R-Quadrado	0,2434							
R-quadrado ajustado	0,2433							
Erro padrão	0,5911							
Observações	7.840							
ANOVA								
	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>			
Regressão	1,0000	880,67	880,67	2.520,94	-			
Resíduo	7.838	2.738,14	0,35					
Total	7.839	3.618,82						
	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>	<i>95% inferiores</i>	<i>95% superiores</i>	<i>Inferior 95,0%</i>	<i>Superior 95,0%</i>
Interseção	(2,2955)	0,0587	(39,0919)	0,0000	(2,4106)	(2,1804)	(2,4106)	(2,1804)
Variável X 1	0,3653	0,0073	50,2090	-	0,3511	0,3796	0,3511	0,3796

Abreviaturas e Siglas

ADF – Augmented Dickey-Fuller

BDS - Brock, Dechert, Scheinkman e LeBaron

CAPM - Capital Asset Pricing Model

ARCH - Autoregressive Conditional Heterocedasticity

GARCH - Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity

ARIMA - Autoregressive Integrated Moving Average

AFRIMA - Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average

AR1 - First Order Auto-regressive

ST-FRSR - State Transition-fitted Residual Scale Ratio

DNPM - Departamento Nacional de Produção Mineral

COMEX - Commodity Exchange of New York

NYMEX – New York Mercantile Exchange

LME - London Metal Exchange

SSE – Shangai Stock Exchange